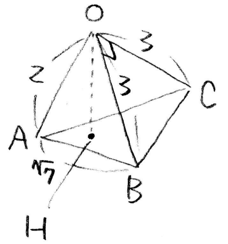
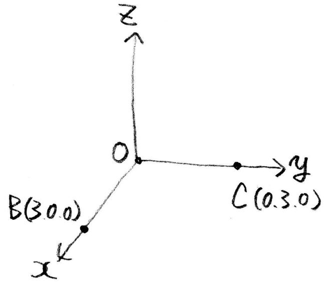
京大文系　2011前期 ②





xyz座標で考える

$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$　$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=3$ より左図のように O, B, C をとれる

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$ より A の座標は (x, x, z) とおける

$|\overrightarrow{OA}|=2$ より　$x^2+x^2+z^2=4$.　$2x^2+z^2=4$ —①

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7}$ より　$(x-3)^2+x^2+z^2=7$.　$2x^2-6x+z^2+2=0$ —②

①②より　$2x^2-6x-2x^2+4+2=0$.　$x=1$

$z^2=2$　対称性より $z>0$ としてよく $z=\sqrt{2}$

A の座標は $(1, 1, \sqrt{2})$

$\overrightarrow{AB}=(2, -1, -\sqrt{2})$　$\overrightarrow{AC}=(-1, 2, -\sqrt{2})$　$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=3(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 2 & -\sqrt{2} & -1 \\ \hline 3 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \end{array}$$

よって 3点 A, B, C を含む平面の方程式は　$\sqrt{2}(x-3)+\sqrt{2}y+z=0$.　$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+z=3\sqrt{2}$ —③

$\overrightarrow{OH}=k(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ と書ける

H は③上にあるから　$\sqrt{2}\sqrt{2}k+\sqrt{2}\sqrt{2}k+k=3\sqrt{2}$.　$5k=3\sqrt{2}$.　$k=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$|(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)|=\sqrt{2+2+1}=\sqrt{5}$

よって　$|\overrightarrow{OH}|=\frac{3\sqrt{2}}{5}\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$