

- (1) 0桁 なく
 1桁 1 2
 2桁 11 12 21 22
 3桁 111 112 121 122 211 212 221 222

$n \geq 2$ とする $T_n = 2T_{n-1} + 2^{n-1} \cdot 10^{n-1} + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 10^{n-1} = 2T_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} \cdot 10^{n-1}$

$\frac{T_n}{2^n} = \frac{T_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{3}{2} 10^{n-1}$ $\frac{T_n}{2^n} = t_n$ とする $t_n = t_{n-1} + \frac{3}{2} 10^{n-1}$

$t_n = t_{n-1} + \frac{3}{2} 10^{n-1}$ $t_1 = \frac{T_1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ $T_n = \frac{2^{n-1}(10^n - 1)}{3}$ — ①

①において $n=0$ とすると $T_0=0$, $n=1$ とすると $T_1 = \frac{1 \cdot (10-1)}{3} = 3$
 よって ①は $n=0, 1$ のときも成立する

+ $t_2 = t_1 + \frac{3}{2} 10$
 $t_n = \frac{3}{2}(1+10+\dots+10^{n-1}) = \frac{3}{2} \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{6}$

- (2) 0桁 0
 1桁 1 2
 2桁 10 11 12 20 21 22
 3桁 100 101 102 110 111 112 120 121 122 200 201 202 210 211 212 220 221 222

$n \geq 2$ とする $S_n = 3S_{n-1} + 3^{n-1} \cdot 10^{n-1} + 3^{n-1} \cdot 2 \cdot 10^{n-1} = 3S_{n-1} + 3^n \cdot 10^{n-1}$

$\frac{S_n}{3^n} = \frac{S_{n-1}}{3^{n-1}} + 10^{n-1}$ $\frac{S_n}{3^n} = S_n$ とする $S_n = S_{n-1} + 10^{n-1}$

$S_n = S_{n-1} + 10^{n-1}$ $S_1 = \frac{S_1}{3} = \frac{0+1+2}{3} = 1$ $S_n = 3^{n-2}(10^n - 1)$ — ②

②において $n=0$ とすると $S_0=0$, $n=1$ とすると $S_1 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$
 よって ②は $n=0, 1$ のときも成立する

+ $S_2 = S_1 + 10$
 $S_n = 1 + 10 + \dots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$

S_n が T_n の15倍以上になるとき $\frac{S_n}{T_n} \geq 15$ $\frac{3^{n-2}(10^n - 1)}{\frac{2^{n-1}(10^n - 1)}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq 15$

$(n-1)(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) \geq \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$ $n-1 \geq \frac{\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}$ $n \geq \frac{1}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} + 2$ — ③ とおくと

$0.477 - 0.302 < \log_{10} 3 - \log_{10} 2 < 0.478 - 0.301$ $0.175 < \log_{10} 3 - \log_{10} 2 < 0.177$

$\frac{1}{0.177} < \frac{1}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} < \frac{1}{0.175}$ $\frac{1000}{177} < \frac{1}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} < \frac{1000}{175}$

$5.6 < \frac{1000}{177}, \frac{1000}{175} < 5.8 \neq 1$ $5.6 < \frac{1}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} < 5.8$ $7.6 < \frac{1}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} + 2 < 7.8$

よって n が 8以上のときである

477	
-302	
175	
478	
-301	
177	
5.6	
177 1000	
885	
1150	
1062	
88	
5.7	
175 1000	
875	
1250	
1225	
25	