京大理系 2011前期 ④

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right) \quad —①$$

$(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\} = \cancel{-a_1}-a_2+a_1a_2+\cancel{a_1}+\frac{a_2}{2} = \left(a_1-\frac{1}{2}\right)a_2 > 0$ より $n=2$ のとき①は成り立つ —②

$n=k$ のとき①が成り立つと仮定する —③

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)\right\}$$

$$=(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}-(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)a_{k+1}+\frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$=\underbrace{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}}_{⑤}+\underbrace{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k-(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)\right\}a_{k+1}}_{⑥} \quad —④$$

ここで③より⑤ >0

$\frac{1}{2}<a_j<1 \quad (j=1,2\cdots k)$, $0<1-a_j<\frac{1}{2}$ より $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)<\left(\frac{1}{2}\right)^k$ より⑥ >0

よって④ >0 より $n=k+1$ のときも①が成り立つ —⑦

②,⑦より数学的帰納法より題意は示された