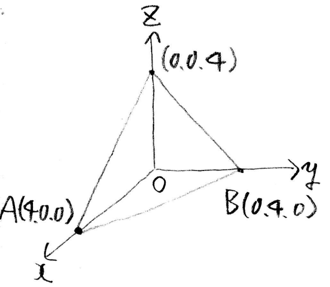
京大理系 2011前期 ⑤




| | | | |
|---|---|---|---|
| −4 | 4 | 0 | −4 |
| −4 | 0 | 4 | −4 |
| 16 | 16 | 16 | |

(4.0.0)をA. (0.4.0)をB. (0.0.4)をCとする

$\overrightarrow{AB}=(-4.4.0)$ $\overrightarrow{AC}=(-4.0.4)$ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=16(1.1.1)$ より

αの方程式は $x-4+y+z=0$. $x+y+z=4$

Oからαに下ろした垂線の足をHとする

$\overrightarrow{OH}=k(1.1.1)$

Hはα上にあるから $k+k+k=4$. $k=\frac{4}{3}$ $\overrightarrow{OH}=\frac{4}{3}(1.1.1)$

$|\overrightarrow{OH}|=\frac{4}{3}\sqrt{3}<\sqrt{6}$ よってSとαは共有点を持つ

点$(x.y.z)$がSとαの共有点であるとき, $x^2+y^2+z^2=6$ —①. $x+y+z=4$ —②

①,②より $16=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=6+2(xy+yz+zx)$ $xy+yz+zx=5$ —③

$(t-x)(t-y)(t-z)=\{t^2-(x+y)t+xy\}(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$ より

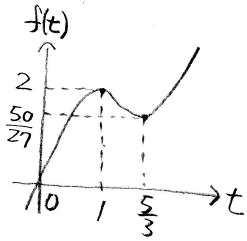
tについての3次方程式 $t^3-4t^2+5t-xyz=0$ —④ は, ②③を満たすx.y.zを解に持つ

$f(t)=t^3-4t^2+5t$ とする. $f'(t)=3t^2-8t+5$. $f'(t)=0$のとき $t=\frac{4\pm\sqrt{16-15}}{3}=\frac{4\pm1}{3}=1,\ \frac{5}{3}$

| $t$ | … | 1 | … | $\frac{5}{3}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(t)$ | ↗ | 2 | ↘ | $\frac{50}{27}$ | ↗ |

$f(t)$の増減表は左表

$f(t)$のグラフは右図




※ $f(\frac{5}{3})=\frac{125}{27}-4\cdot\frac{25}{9}+5\cdot\frac{5}{3}=\frac{125-300+225}{27}=\frac{50}{27}$

よって $\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$ のとき ④は3つの実数解を持つ(重解があってもよい)

ゆえに $\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$