京大理系 2012前期 ③ (京大文系 2012前期 ③ も同じ問題)

$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=(x+y)xy-(x+y)^2+(x+y)$ —①

$x^2+xy+y^2=6$ より. $(x+y)^2-xy=6$. $xy=(x+y)^2-6$

よって ①$=(x+y)^3-(x+y)^2-5(x+y)$ —①′

xy平面上において. kをある実数として 直線 $x+y=k$ と $x^2+xy+y^2=6$ は

$x^2+x(-x+k)+(-x+k)^2-6=0$. $\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+kx+x^2-2kx+k^2-6=0$ $x^2-kx+k^2-6=0$ より

$k^2-4(k^2-6)\geqq 0$ $3k^2\leqq \overset{8}{\cancel{24}}$. $-2\sqrt{2}\leqq k\leqq 2\sqrt{2}$ のとき交点を持つから.

$x^2+xy+y^2=6$ のとき $-2\sqrt{2}\leqq x+y\leqq 2\sqrt{2}$ —②

$f(k)=k^3-k^2-5k$ $(-2\sqrt{2}\leqq k\leqq 2\sqrt{2})$ とすると. $f'(k)=3k^2-2k-5$. $f'(k)=0$のとき $k=\frac{1\pm\sqrt{1+15}}{3}=\frac{1\pm 4}{3}=-1, \frac{5}{3}$

k	$-2\sqrt{2}$	…	-1	…	$\frac{5}{3}$	…	$2\sqrt{2}$
$f'(k)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(k)$	$-6\sqrt{2}-8$	↗	3	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	$6\sqrt{2}-8$

$f(k)$の増減表は左表

$-6\sqrt{2}-8\leqq f(k)\leqq 3$ —③

①′②③より $-6\sqrt{2}-8\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$

※ $f(-2\sqrt{2})=-16\sqrt{2}-8+10\sqrt{2}=-6\sqrt{2}-8$

$f(-1)=-1-1+5=3$

$f(\frac{5}{3})=\frac{125}{27}-\frac{25}{9}-\frac{25}{3}=\frac{125-75-225}{27}=-\frac{175}{27}$

$f(2\sqrt{2})=16\sqrt{2}-8-10\sqrt{2}=6\sqrt{2}-8$