

1 数学のテストのあとで、高校生の弟が、大学生の姉と次のような対話をした。 の中に適当な記号、式、あるいは語句をいれよ。

(弟) きょう、学校で数学のテストがありました。命題がいくつかあって、正しいものに印を、正しくないものには×印をつける問題でした。全部できたつもりです。

(姉) それは、よかったですね。その中の一つをいってごらん。

(弟) こんなのがありました。

「二直線 $y + k(x - 2) = 0 \cdots \cdots (1)$, $ky - (x + 2) = 0 \cdots \cdots (2)$ の交点は、 k がどんな実数値をとっても、円 $x^2 + y^2 - 4 = 0 \cdots \cdots (3)$ の上にある」というのです。もちろん、印をつけました。

(姉) なぜ、これが正しいことがわかりましたか。

(弟) (1), (2) から k を消去したら、(3) がでるからです。それでいいでしょう。

(姉) 結構ですね。しかし、この問題が本当によくわかっているかどうか、二、三質問をしてみましょう。まず、この命題に二直線とあるのは、もちろん (x, y) 平面上の二直線のことですね。では、 k はどういうものですか。

(弟) k は実数値をとる変数です。、それに応じて、方程式 (1), (2) の係数がきまって、それぞれのあらかず直線がきまります。、それに対応する二直線が動きます。

(姉) ところで、二直線の交点とありますが、 k の値によっては、この二直線が になることはないかしら。

(弟) いや、それどころか、いつでも します。

(姉) どうして。

(弟) のときには、二直線の方向係数は、それぞれ、ですが、ですから、の条件をみたくします。

のときには、(1) は 軸と し、(2) は 軸と ですから、やはり、(1), (2) は

します。

(姉) うまく証明しましたね。では、本題にはいって、(1)、(2) から k を消去して、(3) ができたことから、(1)、(2) の交点が (3) の上にあると結論したのは、どういう理由ですか。

(弟) 僕は、こういう問題は消去するものと覚えこんでいただけで、理由なんて考えてみたこともありません。教えてください。

(姉) では、 k を消去したときに、(3) の左辺をどのようにして、(1)、(2) の左辺から出したか、まず、それを式でかいてごらん。

(弟) $x^2 + y^2 - 4 = \{y + k(x - 2)\} - \{ky - (x + 2)\} \dots \dots (4)$ です。

(姉) ここにあなたがかいた等式 (4) は、等式 (1)、(2)、(3) と性格がちがいますね。

(弟) (1)、(2)、(3) は 式ですが、(4) は 式です。

(姉) そのことを心にとめておいて、(1)、(2) の交点が、(3) の上にあることを証明しましょう。

(a, b) が (1)、(2) の交点であるとすれば $x = a, y = b$ は をみたく。次に、いま注意したことから、 $x = a, y = b$ は、もちろん をみたく。この二つのことから、 $x = a, y = b$ は をみたくし、 (a, b) が の上にあることがわかる。というわけです。

(弟) なるほど、これで、消去の意味がよくわかりました。ところで、姉さん。 k がすべての実数値をとるとき、この交点は、(3) 式の円をえがくのですか。

(姉) この交点のえがく曲線は、幾何では、交点の といいますね。これを α とし、(3) 式の円を β とすると、いままで話しあったことから、 α は β と するか、または α は β の であることがわかりますね。実際は、 α は β から を除いたものです。証明は、ゆっくりあとで考えてごらん。