

3 座標平面の原点を O とし, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする. また α, β は2つの実数とする. 任意の点 P に対しベクトル \overrightarrow{OP} の \overrightarrow{OA} への正射影を $\overrightarrow{OP_1}$ (すなわち点 P_1 は P から O と A を通る直線へおろした垂線の足), \overrightarrow{OP} の \overrightarrow{OB} への正射影を $\overrightarrow{OP_2}$ とし, 一次変換 $f_{\alpha, \beta}$ を $f_{\alpha, \beta}(\overrightarrow{OP}) = \alpha \overrightarrow{OP_1} + \beta \overrightarrow{OP_2}$ によって定める.

一次変換 g がどのような α, β に対しても $f_{\alpha, \beta} \circ g = g \circ f_{\alpha, \beta}$ (\circ は変換の合成を表す) となるための必要十分条件は, ある α', β' に対して $g = f_{\alpha', \beta'}$ となることである. これを証明せよ.