

2 $0 < a \leq b$ をみたす実数 a, b に対し, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $a_1 = a, b_1 = b,$
 $a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ ($n \geq 2$) によって定める.

- (1) すべての自然数 n に対し, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ が成り立つことを示せ.
- (2) すべての自然数 n に対し, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8a_n}(b_n - a_n)^2$ が成り立つことを示せ.
- (3) $a = 100, b = 900$ のとき, $b_n - a_n < 4$ をみたす最小の n を求めよ.