

5  $xy$  平面上の正三角形  $\triangle ABC$  を考える． $\triangle ABC$  の重心は原点  $O$  にあり，ベクトル  $\overrightarrow{OA}$  の長さは 1 とする． $\triangle ABC$  の内部または辺上の点  $P_0$  に対し，3 頂点  $A, B, C$  から 1 点を等確率  $\frac{1}{3}$  で選び，この頂点と  $P_0$  の中点を  $P_1$  とする．次に点  $P_1$  に対して同様の操作を行い得られた点を  $P_2$  とし，以下この操作を繰り返して，点  $P_3, P_4, \dots, P_n$  を作る．ベクトル  $\overrightarrow{OP_n}$  の長さの 2 乗  $|\overrightarrow{OP_n}|^2$  の期待値を  $E_n$  とおく．

- (1)  $E_1$  をベクトル  $\overrightarrow{OP_0}$  の長さをを用いて表せ．
- (2) 選んだ頂点が  $X_1, X_2, \dots, X_n$  のとき，ベクトル  $\overrightarrow{OP_n}$  をベクトル  $\overrightarrow{OP_0}$  と  $\overrightarrow{OX_i}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，を用いて表せ．
- (3)  $P_0$  が原点  $O$  のとき  $E_n$  を求めよ．