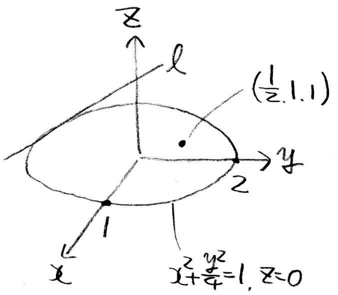
東工大　1991前期　②




楕円上の点$(X, Y, 0)$における接線の方向ベクトルは

$x^2+\frac{y^2}{4}=1$の両辺を$x$で微分すると $\cancel{2}x+\frac{1}{4}\cancel{2}y\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{y}{4}\frac{dy}{dx}=-x$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{y}$ より

$Y\neq 0$のとき $(1, -\frac{4X}{Y}, 0)$, $(Y, -4X, 0)$

$Y=0$のとき, $(0, 1, 0)$

よって楕円上の点$(X, Y, 0)$における接線の方向ベクトルは $(Y, -4X, 0)$

$(Y, -4X, 0)\times\{(\frac{1}{2}, 1, 1)-(X, Y, 0)\}=(Y, -4X, 0)\times(-X+\frac{1}{2}, -Y+1, 1)=(-4X, -Y, -4X^2-Y^2+2X+Y)$ より

$$\begin{array}{cccc} Y & -4X & 0 & Y \\ -X+\frac{1}{2} & -Y+1 & 1 & -X+\frac{1}{2} \\ \hline -Y^2+Y-4X^2+2X & -4X & -Y & \end{array}$$

$\pi$の方程式は $-4X(x-\frac{1}{2})-Y(y-1)+(-4X^2-Y^2+2X+Y)(z-1)=0$

$\cancel{2X}+\cancel{Y}+(-4X^2-Y^2+2X+Y)k+4X^2+Y^2-\cancel{2X}-\cancel{Y}=0$, $(4X^2+Y^2-2X-Y)k=4X^2+Y^2$

$X^2+\frac{Y^2}{4}=1$ より $(4-2X-Y)k=4$,

$X=\cos\theta$, $Y=2\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけるから, $(4-2\cos\theta-2\sin\theta)k=4$, $(2-\cos\theta-\sin\theta)k=2$

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}(\sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ より

$\{2-\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\}k=2$　　$k=\frac{2}{2-\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$

$k$の最大値は $\frac{2}{2-\sqrt{2}}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4-2}=2+\sqrt{2}$

$k$の最小値は $\frac{2}{2+\sqrt{2}}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{4-2\sqrt{2}}{4-2}=2-\sqrt{2}$

よって　$2-\sqrt{2}\leqq k\leqq 2+\sqrt{2}$