

$$x \leq 0 \text{ のとき } x^3 - ax^2 + bx - c < 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$x > 0 \text{ のとき, } x \text{ を固定したときの } x^3 - ax^2 + bx - c \text{ の最小値は } x^3 - 6x^2 + x - 6 = x^2(x-6) + x - 6 = (x+1)(x-6)$$

$$\text{よって } x > 6 \text{ のとき, } x^3 - ax^2 + bx - c > 0 \quad \text{--- (2)}$$

①②より、方程式の整数解は 1, 2, 3, 4, 5, 6 に限られる。

出た目が a, b, c であることを (a, b, c) と書く。

(1) 1 を解にもつとき

$$1 - a + b - c = 0, \quad c = -a + b + 1$$

$$(1-1) \quad c=1 \text{ のとき } 1 = -a + b + 1, \quad a = b \quad \text{よって } (1, 1, 1) (2, 2, 1) (3, 3, 1) (4, 4, 1) (5, 5, 1) (6, 6, 1)$$

$$(1-2) \quad c=2 \text{ のとき } 2 = -a + b + 1, \quad a + 1 = b \quad \text{よって } (1, 2, 2) (2, 3, 2) (3, 4, 2) (4, 5, 2) (5, 6, 2)$$

$$(1-3) \quad c=3 \text{ のとき } 3 = -a + b + 1, \quad a + 2 = b \quad \text{よって } (1, 3, 3) (2, 4, 3) (3, 5, 3) (4, 6, 3)$$

$$(1-4) \quad c=4 \text{ のとき } 4 = -a + b + 1, \quad a + 3 = b \quad \text{よって } (1, 4, 4) (2, 5, 4) (3, 6, 4)$$

$$(1-5) \quad c=5 \text{ のとき } 5 = -a + b + 1, \quad a + 4 = b \quad \text{よって } (1, 5, 5) (2, 6, 5)$$

$$(1-6) \quad c=6 \text{ のとき } 6 = -a + b + 1, \quad a + 5 = b \quad \text{よって } (1, 6, 6)$$

} 21通り

(2) 2 を解にもつとき

$$2^3 - 2^2a + 2b - c = 0, \quad c = 2(-2a + b + 4)$$

$$(2-1) \quad c=2 \text{ のとき } -2a + b + 4 = 1, \quad 2a = b + 3 \quad \text{よって } (2, 1, 2) (3, 3, 2) (4, 5, 2)$$

$$(2-2) \quad c=4 \text{ のとき } -2a + b + 4 = 2, \quad 2a = b + 2 \quad \text{よって } (2, 2, 4) (3, 4, 4) (4, 6, 4)$$

$$(2-3) \quad c=6 \text{ のとき } -2a + b + 4 = 3, \quad 2a = b + 1 \quad \text{よって } (1, 1, 6) (2, 3, 6) (3, 5, 6)$$

} 9-1=8通り

* (4, 5, 2) は (1) にもある

(3) 3 を解にもつとき

$$3^3 - 3^2a + 3b - c = 0, \quad c = 3(-3a + b + 4)$$

$$(3-1) \quad c=3 \text{ のとき } -3a + b + 4 = 1, \quad 3a = b + 3 \quad \text{よって } (3, 1, 3) (4, 4, 3)$$

$$(3-2) \quad c=6 \text{ のとき } -3a + b + 4 = 2, \quad 3a = b + 2 \quad \text{よって } (3, 2, 6) (4, 5, 6)$$

} 4通り

(4) 4 を解にもつとき

$$4^3 - 4^2a + 4b - c = 0, \quad c = 4(-4a + b + 6)$$

$$(4-1) \quad c=4 \text{ のとき } -4a + b + 6 = 1, \quad 4a = b + 5 \quad \text{よって } (4, 1, 4) (5, 5, 4) \quad \text{ } \} 2通り$$

(5) 5 を解にもつとき

$$5^3 - 5^2a + 5b - c = 0, \quad c = 5(-5a + b + 25)$$

$$(5-1) \quad c=5 \text{ のとき } -5a + b + 25 = 1, \quad 5a = b + 24 \quad \text{よって } (5, 1, 5) (6, 6, 5) \quad \text{ } \} 2通り$$

(6) 6 を解にもつとき

$$6^3 - 6^2a + 6b - c = 0, \quad c = 6(-6a + b + 36)$$

$$(6-1) \quad c=6 \text{ のとき } -6a + b + 36 = 1, \quad 6a = b + 35 \quad \text{よって } (6, 1, 6) \quad \text{ } \} 1通り$$

(1)~(6)より、方程式が少なくとも1個の整数解をもつ目の出方は $21 + 8 + 4 + 2 + 2 + 1 = 38$ 通り

$$\text{よって 求めた確率は } \frac{38}{6^3} = \frac{19}{108}$$

$$\frac{36}{108} \times \frac{3}{3} = \frac{36}{108}$$