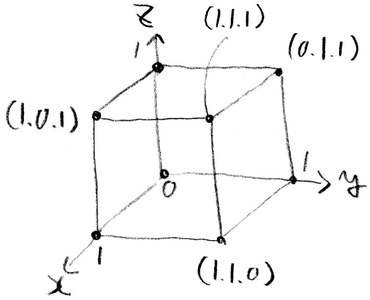
東工大　1993後期　①



xyz空間で考える.

左図のような立方体を
$(0.0.0)$, $(1.1.1)$を通る直線lを軸として
回転させることを考える.

lの方向ベクトルのうち, 大きさが1であるものの1つは $\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$

l上の点 $\left(\frac{a}{\sqrt3}, \frac{a}{\sqrt3}, \frac{a}{\sqrt3}\right)$ $\left(0\leqq a\leqq \frac{\sqrt3}{2}\right)$ を通り
法線ベクトルが$(1.1.1)$の平面をπとする.

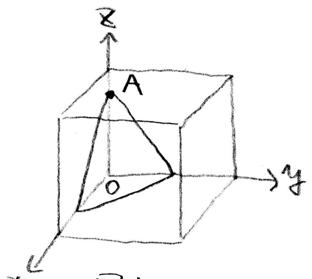
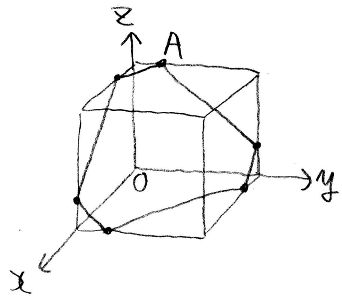


図1

πの方程式は, $x-\frac{a}{\sqrt3}+y-\frac{a}{\sqrt3}+z-\frac{a}{\sqrt3}=0$, $x+y+z=\sqrt3 a$

πが$(0.0.1)$を通るとき, $a=\frac{1}{\sqrt3}$ であるから, πと立方体の交わりは
$0\leqq a\leqq\frac{1}{\sqrt3}$ のとき図1, $\frac{1}{\sqrt3}\leqq a\leqq\frac{\sqrt3}{2}$ のとき図2 のようになる.



πと立方体の交わり上にある点と$\left(\frac{a}{\sqrt3}, \frac{a}{\sqrt3}, \frac{a}{\sqrt3}\right)$の距離の最大値を$f(a)$とすると.
$f(a)$を与える点の1つは 図1, 図2の A である

πとz軸の交点の座標は $(0.0.\sqrt3 a)$
よって $0\leqq a\leqq \frac{1}{\sqrt3}$ のとき $f(a)^2=\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}+\frac43a^2=2a^2$

πと直線 $x=0$, $z=1$ の交点の座標は
$y+1=\sqrt3 a$, $y=\sqrt3a-1$ より $(0, \sqrt3a-1, 1)$
よって $\frac{1}{\sqrt3}\leqq a\leqq\frac{\sqrt3}{2}$ のとき, $f(a)^2=\frac{a^2}{3}+\left(\frac{3a}{\sqrt3}-1-\frac{a}{\sqrt3}\right)^2+\left(1-\frac{a}{\sqrt3}\right)^2$

$$=\frac{a^2}{3}+\frac43a^2-2\frac{2}{\sqrt3}a+1+1-\frac{2}{\sqrt3}a+\frac{a^2}{3}=2a^2-2\sqrt3a+2$$

求める体積をVとすると, 対称性より

$$\frac{V}{2}\frac{1}{\pi}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}2a^2da+\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\frac{\sqrt3}{2}}(2a^2-2\sqrt3a+2)da=2\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt3}}+2\left[\frac{a^3}{3}-\sqrt3\frac{a^2}{2}+a\right]_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\frac{\sqrt3}{2}}$$

$$=\cancel{\frac23\frac{1}{3\sqrt3}}+\frac{2}{\cancel3}\frac{\cancel3\sqrt3}{8}-\sqrt3\frac34+\sqrt3-\cancel{\frac23\frac{1}{3\sqrt3}}+\sqrt3\frac13-\frac{2}{\sqrt3}=\left(\frac14-\frac34+1+\frac13-\frac23\right)\sqrt3$$

$$=\left(-\frac12+1-\frac13\right)\sqrt3=\frac{\sqrt3}{6}$$

$V=\frac{\sqrt3}{3}\pi$