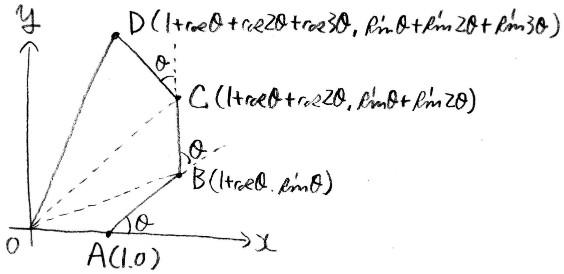
東工大　1995前期　②



xy座標で考える。
左図のようにO, A, B, C, Dをとる。
△OAB, △OBC, △OCDの面積を
S_1, S_2, S_3とする。

$S_1=\frac{1}{2}|\sin\theta|=\frac{1}{2}\sin\theta$

$S_2=\frac{1}{2}|(1+\cos\theta)(\sin\theta+\sin2\theta)-\sin\theta(1+\cos\theta+\cos2\theta)|=\frac{1}{2}|\cancel{(1+\cos\theta)\sin\theta}+(1+\cos\theta)2\sin\theta\cos\theta-\cancel{\sin\theta(1+\cos\theta)}-\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)|$

$=\frac{1}{2}|2\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)-\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin^3\theta|=\frac{1}{2}|2\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta-\cancel{2\sin^3\theta}-\sin\theta+\cancel{\sin^3\theta}+\cancel{\sin^3\theta}|$

$=\frac{1}{2}|2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta|=\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$

$S_3=\frac{1}{2}|(1+\cos\theta+\cos2\theta)(\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta)-(\sin\theta+\sin2\theta)(1+\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta)|$

$=\frac{1}{2}|\cancel{(1+\cos\theta+\cos2\theta)(\sin\theta+\sin2\theta)}+(1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin3\theta-\cancel{(\sin\theta+\sin2\theta)(1+\cos\theta+\cos2\theta)}-(\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)\cos3\theta|$

ここで $\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta\cos\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta$

$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta=2\sin\theta-2\sin^3\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\cos3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta+2\cos^3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ より.

$S_3=\frac{1}{2}|(\cos\theta+2\cos^2\theta)(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-(\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)(4\cos^3\theta-3\cos\theta)|$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta|(1+2\cos\theta)(3-4\sin^2\theta)-(1+2\cos\theta)(4\cos^2\theta-3)|$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1+2\cos\theta)|3-\cancel{4\sin^2\theta}-4+\cancel{4\sin^2\theta}+3|=\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)=-2\sin^3\theta+2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta$

五角形の面積を $S(\theta)$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とすると $S(\theta)=S_1+S_2+S_3=-2\sin^3\theta+3\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$S'(\theta)=-6\sin^2\theta\cos\theta+3\cos\theta+2\cos\theta\cos\theta-2\sin\theta\sin\theta$

$=-6(1-\cos^2\theta)\cos\theta+3\cos\theta+2\cos^2\theta-2(1-\cos^2\theta)$

$=-6\cos\theta+6\cos^3\theta+3\cos\theta+2\cos^2\theta-2+2\cos^2\theta$

$=6\cos^3\theta+4\cos^2\theta-3\cos\theta-2$

$=(\cos\theta+\frac{2}{3})6(\cos^2\theta-\frac{1}{2})$

$S'(\theta)=0$ のとき $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$

※ $6(-\frac{2}{3})^3+4(-\frac{2}{3})^2-3(-\frac{2}{3})-2$

$=-\frac{48}{27}+\frac{16}{9}+2-2=0$

$$\begin{array}{rl} & 6x^2 \qquad -3 \\ x+\frac{2}{3}\,\big) & 6x^3+4x^2-3x-2 \\ & 6x^3+4x^2 \\ \hline & \qquad\quad -3x-2 \\ & \qquad\quad -3x-2 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

θ	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$		↗	$\sqrt{2}+1$	↘	

$S(\theta)$の増減表は左表のようになる。

よって五角形の面積の最大値は $\sqrt{2}+1$

$S(\frac{\pi}{4})=-2\frac{1}{2\sqrt{2}}+3\frac{1}{\sqrt{2}}+2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$