東工大 1995前期 ④

(1) すべての取り出し方を1回ずつ行ったときの,書かれた数の積の,総和は

$$\frac{1}{2}\{(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)-(1^2+2^2+\cdots+n^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}=\frac{n(n+1)}{24}\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$

$$=\frac{n(n+1)}{24}(3n^2-n-2)=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

$$\begin{array}{r} 3n+2 \\ n-1 \,\big)\, \overline{3n^2-n-2} \\ 3n^2-3n \\ \hline 2n-2 \\ 2n-2 \\ \hline 0 \end{array}$$

すべての取り出し方は $\frac{n(n-1)}{2}$ 通り

よって $E=\dfrac{\frac{\cancel{n}(n+1)\cancel{(n-1)}(3n+2)}{24}}{\frac{\cancel{n(n-1)}}{2}}=\dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$

(2) すべての取り出し方を1回ずつ行ったときの,書かれた数の積の,総和は

$$\frac{1}{6}\{(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)-3(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1+2+\cdots+n)+2(1^3+2^3+\cdots+n^3)\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{8}n^3(n+1)^3-\cancel{3}\frac{1}{\cancel{6}_2}n(n+1)(2n+1)\frac{1}{2}n(n+1)+\cancel{2}\frac{1}{\cancel{4}_2}n^2(n+1)^2\right\}=\frac{n^2(n+1)^2}{48}\{n(n+1)-2(2n+1)+4\}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{48}(n^2-3n+2)=\frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{48}$$

$$\begin{array}{r} n-2 \\ n-1 \,\big)\, \overline{n^2-3n+2} \\ n^2-n \\ \hline -2n+2 \\ -2n+2 \\ \hline 0 \end{array}$$

すべての取り出し方は $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通り

よって $E(n)=\dfrac{\frac{n^{\cancel{2}}(n+1)^2\cancel{(n-1)(n-2)}}{48}}{\frac{\cancel{n(n-1)(n-2)}}{6}}=\dfrac{n(n+1)^2}{8}$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{8}$