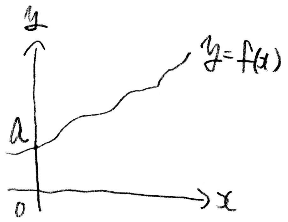
東工大　1996前期　④

(1) (イ)より $x\geqq 0$ のとき $f(x)$ は単調増加であるから
$f(x)$ のグラフは右図のようになる.



Pにおける接線の方程式は $y-f(t)=f'(t)(x-t)$.

$-f(t)=f'(t)(x-t)$. $x=-\dfrac{f(t)}{f'(t)}+t$ より Qの x 座標は $-\dfrac{f(t)}{f'(t)}+t$

Pにおける法線の方程式は $y-f(t)=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)$

$-f(t)=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)$ $x=f(t)f'(t)+t$ より Rの x 座標は $f(t)f'(t)+t$

よって $F(t)=f(t)f'(t)+\dfrac{f(t)}{f'(t)}$

(ハ)より $f'(t)+\dfrac{1}{f'(t)}=\dfrac{f(t)}{f'(t)}$, $f'(t)^2+1=f(t)$　よって $f'(x)^2+1=f(x)$ $(x\geqq 0)$ —①

$x\geqq 0$ のとき $f(x)$ は単調増加であるから ①より $x\geqq 0$ のとき $f'(x)^2$ は単調増加.
(イ)より $x\geqq 0$ のとき $f'(x)$ は単調増加 —②

①より $f'(0)^2+1=a$. (イ)より $f'(0)=\sqrt{a-1}$ —③

平均値の定理より $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(c)$ $(x<c<x+h)$ を満たす c が存在する. $f(x+h)-f(x)=f'(c)h$ —④

$x>0$ より $c>0$, ②③より $f'(c)\geqq\sqrt{a-1}$ —⑤
④⑤より $f(x+h)-f(x)\geqq\sqrt{a-1}\,h$

(2) (ハ)より $F(t)=\dfrac{f(t)^2}{f'(t)}$, (1)より $F(t)^2=\dfrac{f(t)^4}{f'(t)^2}=\dfrac{f(t)^4}{f(t)-1}$

(1)より x_0 を $x_0>0$ を満たす定数とすると
$f(x_0+h)-f(x_0)\geqq\sqrt{a-1}\,h$, $f(h+x_0)\geqq\sqrt{a-1}\,h+f(x_0)$
$\displaystyle\lim_{h\to\infty}\{\sqrt{a-1}\,h+f(x_0)\}=\infty$ より
$\displaystyle\lim_{h\to\infty}f(h+x_0)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$
よって $f(t)$ は a 以上の任意の値を取り得る

$g(T)=\dfrac{T^4}{T-1}$ $(T>1)$ とする

$g'(T)=\dfrac{4T^3(T-1)-T^4}{(T-1)^2}=\dfrac{T^3(4T-4-T)}{(T-1)^2}=\dfrac{T^3(3T-4)}{(T-1)^2}$　$g'(T)=0$ のとき $T=\dfrac{4}{3}$

T	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$g'(T)$	$-$	0	$+$
$g(T)$	$\searrow$	$\frac{256}{27}$	$\nearrow$

$g(T)$ の増減表は左表のようになる.

$g\left(\frac{4}{3}\right)=\dfrac{\frac{256}{81}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{256}{27}$

(i) $1<a\leqq\dfrac{4}{3}$ のとき
$f(t)=\dfrac{4}{3}$ となる値が存在するから
$F(t)$ の最小値は $f(t)=\dfrac{4}{3}$ のとき $\dfrac{16}{3\sqrt{3}}=\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$

(ii) $a>\dfrac{4}{3}$ のとき
$f(t)=\dfrac{4}{3}$ となる値が存在せず, $f(t)\geqq a$ であるから
$F(t)$ の最小値は $f(t)=a$ のとき $\dfrac{a^2}{\sqrt{a-1}}$