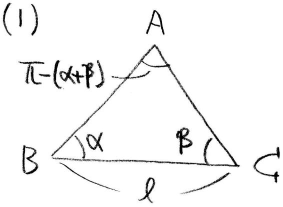
東工大　1997前期 ④

(1)



左図のような三角形を考える

これの面積をSとすると $S=l\cdot AB\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}$

正弦定理より $\dfrac{l}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}=\dfrac{AC}{\sin\alpha}=\dfrac{AB}{\sin\beta}$

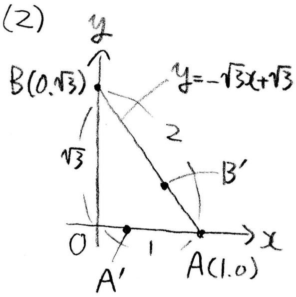
$$S=l\,\frac{l\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha\frac{1}{2}=\frac{l^2}{2}\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}+\sin\alpha\sin\beta-\cancel{\cos\alpha\cos\beta}+\sin\alpha\sin\beta=2\sin\alpha\sin\beta$ より

$$S=\frac{l^2}{4}\,\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

以上より題意は示された.

(2)



xy平面で考える

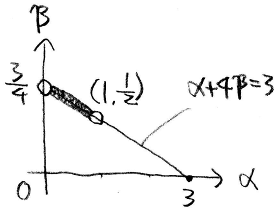
左図のような△OABを考える

OA上に $A'(\alpha, 0)$ $(0<\alpha<1)$, AB上に $B'(\beta, -\sqrt{3}\beta+\sqrt{3})$ $(0<\beta<1)$ をとる.

B′をA′を中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転させた点をC′とすると, C′の座標は

$$\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta-\alpha\\-\sqrt{3}\beta+\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta-\alpha\\-\sqrt{3}\beta+\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta-\frac{3}{2}\\\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\beta}-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\beta}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\alpha+2\beta-\frac{3}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}\alpha+2\beta-\frac{3}{2}=0$, $\alpha+4\beta=3$ のとき, △A′B′C′は題意を満たす正三角形になる.



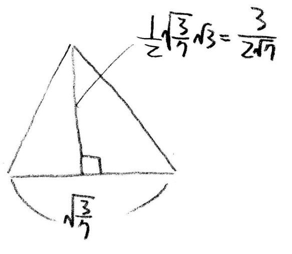
(α, β)の取り得る範囲は左図の太線部である

$$|\overrightarrow{A'B'}|^2=(\beta-\alpha)^2+(-\sqrt{3}\beta+\sqrt{3})^2=(\beta+4\beta-3)^2+3(-\beta+1)^2=25\beta^2-30\beta+9+3\beta^2-6\beta+3$$

$$=28\beta^2-36\beta+12=28\left(\beta^2-\frac{9}{7}\beta+\frac{9^2}{14^2}\right)-28\frac{9^2}{14^2}+\frac{84}{7}=28\left(\beta-\frac{9}{14}\right)^2+\frac{3}{7}$$ より.

$|\overrightarrow{A'B'}|$ は $\beta=\frac{9}{14}$, $\alpha=-4\frac{9}{14}+\frac{21}{7}=\frac{3}{7}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{3}{7}}$ をとる

ここで $(\alpha, \beta)=\left(\frac{3}{7}, \frac{9}{14}\right)$ は(α, β)の取り得る範囲の中にある



左図より1辺の長さが $\sqrt{\frac{3}{7}}$ の正三角形の面積は

$\sqrt{\frac{3}{7}}\,\frac{3}{2\sqrt{7}}\,\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{28}$ であるから

求める値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{28}$