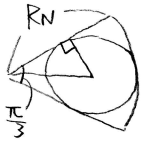
東工大　1999後期　②

(1) 1回目, 2回目 … N回目の円の半径を $r_1, r_2 \cdots r_N$ とする



N回目の円は中心角 $\frac{\pi}{3}$, 半径 R_N の扇形に内接する円であるから

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{r_N}{R_N - r_N}$ —①

$R_{N+1} = R_N - 2r_N$ —②

①②より $\frac{1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}R_{N+1}+\frac{1}{2}R_N}{R_N+\frac{1}{2}R_{N+1}-\frac{1}{2}R_N}$, $\frac{1}{2}R_{N+1}+\frac{1}{2}R_N = -R_{N+1}+R_N$, $\frac{3}{2}R_{N+1}=\frac{1}{2}R_N$, $R_{N+1}=\frac{1}{3}R_N$, $R_1=1$より $R_N=\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}$

①より $\frac{1}{2}=\frac{r_N}{R_N-r_N}$　$R_N-r_N=2r_N$, $r_N=\frac{1}{3}R_N=\left(\frac{1}{3}\right)^N$

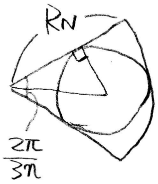
N回目の円の面積は $6\cdot\pi\left(\frac{1}{9}\right)^N$ であるから

$S_2=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}6\pi\left(\frac{1}{9}\right)^k=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^N\right\}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\cancel{9}^{\,3}}{{}_{4}\cancel{8}}\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{4}\pi$

N回目の円の円周の長さは $6\cdot2\pi\left(\frac{1}{3}\right)^N$ であるから

$C_2=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}12\pi\left(\frac{1}{3}\right)^k=\lim_{N\to\infty}\frac{4\pi\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^N\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{4}^{\,2}\pi=6\pi$

(2)



N回目の円は中心角 $\frac{2\pi}{3n}$, 半径 R_N の扇形に内接する円であるから

$\sin\frac{\pi}{3n}=\frac{r_N}{R_N-r_N}$ —③　　$\frac{\pi}{3n}=\theta$ とおく

$R_{N+1}=R_N-2r_N$ —④

③④より $\sin\theta=\frac{-\frac{1}{2}R_{N+1}+\frac{1}{2}R_N}{R_N+\frac{1}{2}R_{N+1}-\frac{1}{2}R_N}$　$\cancel{\frac{1}{2}}\sin\theta\cdot R_{N+1}+\cancel{\frac{1}{2}}\sin\theta\cdot R_N=-\cancel{\frac{1}{2}}R_{N+1}+\cancel{\frac{1}{2}}R_N$　$(1+\sin\theta)R_{N+1}=(1-\sin\theta)R_N$

$R_{N+1}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}R_N$, $R_1=1$より $R_N=\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{N-1}$

③より $\sin\theta\cdot R_N-\sin\theta\cdot r_N=r_N$, $r_N=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}R_N=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{N-1}=\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^N$

N回目の円の面積は $3n\pi\frac{\sin^2\theta}{(1-\sin\theta)^2}\left\{\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\right\}^N$ であるから

$S_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}3n\pi\frac{\sin^2\theta}{(1-\sin\theta)^2}\left\{\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\right\}^k=\lim_{N\to\infty}\frac{3n\pi\frac{\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}\left[1-\left\{\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\right\}^N\right]}{1-\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}$

$=\frac{3n\pi\sin^2\theta}{\cancel{1}+2\sin\theta+\cancel{\sin^2\theta}-\cancel{1}+2\sin\theta-\cancel{\sin^2\theta}}=\frac{3n\pi}{4}\sin\theta=\frac{3n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3n}$

N回目の円の円周の長さは $3n\cdot2\pi\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^N$ であるから

$C_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}6n\pi\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^k=\lim_{N\to\infty}\frac{6n\pi\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\left\{1-\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^N\right\}}{1-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{6n\pi\sin\theta}{\cancel{1}+\sin\theta-\cancel{1}+\sin\theta}=3n\pi$

(3) $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n}}\frac{\pi}{\cancel{3n}}\frac{\cancel{3n}\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}$