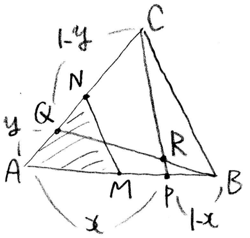
東工大 2003前期 ③



$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\alpha(y\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(-\alpha+1)\overrightarrow{AB}+\alpha y\overrightarrow{AC}$ —①

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\beta(x\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\beta x\overrightarrow{AB}+(-\beta+1)\overrightarrow{AC}$ —②

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ は1次独立であるから ①②より $\begin{cases}-\alpha+1=\beta x\\ \alpha y=-\beta+1\end{cases}$

$-\alpha+1=(-\alpha y+1)x$, $(xy-1)\alpha=x-1$, $\alpha=\dfrac{x-1}{xy-1}$

$\overrightarrow{AR}=\dfrac{-x+\cancel{1}+xy-\cancel{1}}{xy-1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{(x-1)y}{xy-1}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2x(y-1)}{xy-1}\overrightarrow{AM}+\dfrac{2(x-1)y}{xy-1}\overrightarrow{AN}$

よって、Rが△AMNに含まれるには、$0\leqq\dfrac{2x(y-1)}{xy-1}\leqq1$ —③ かつ $0\leqq\dfrac{2(x-1)y}{xy-1}\leqq1$ —④ かつ $\dfrac{2x(y-1)}{xy-1}+\dfrac{2(x-1)y}{xy-1}\leqq1$ —⑤

であればよい。

③について、$0\leqq\dfrac{2x(y-1)}{xy-1}$ は明らかに成立つ。

$\dfrac{2x(y-1)}{xy-1}\leqq1$ のとき、$2xy-2x\geqq xy-1$, $xy\geqq 2x-1$, $y\geqq 2-\dfrac{1}{x}$ } ③′

④について $0\leqq\dfrac{2(x-1)y}{xy-1}$ は明らかに成立つ。

$\dfrac{2(x-1)y}{xy-1}\leqq1$ のとき、$2xy-2y\geqq xy-1$, $(x-2)y\geqq-1$, $y\leqq\dfrac{1}{2-x}$ } ④′

⑤について、$2xy-2x+2xy-2y\geqq xy-1$, $(3x-2)y\geqq 2x-1$ —⑤′

(i) $x=\frac{2}{3}$ のとき、⑤′は $0\geqq\frac{1}{3}$ となり矛盾するから、⑤′は成立たない

(ii) $0\leqq x<\frac{2}{3}$ のとき、⑤′は $y\leqq\dfrac{2x-1}{3x-2}$ となる

(iii) $\frac{2}{3}<x\leqq1$ のとき、⑤′は $y\geqq\dfrac{2x-1}{3x-2}$ となる

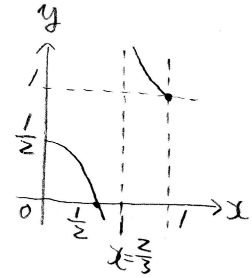
$f(x)=\dfrac{2x-1}{3x-2}$ $(0\leqq x\leqq1,\ x\neq\frac{2}{3})$ とする

$f'(x)=\dfrac{2(3x-2)-(2x-1)3}{(3x-2)^2}=\dfrac{6x-4-6x+3}{(3x-2)^2}<0$ より、$f(x)$は単調減少

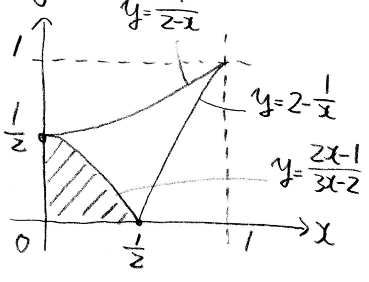
x	0	…	$\frac{2}{3}$	…	1
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ | ∞	↘	1

$f(x)$の増減表は左表のようになる。

$y=f(x)$のグラフは右図のようになる。



} ⑤″



③′④′⑤″より、題意を満たす(x, y)全体は左図の斜線部である

境界線上の点含む。

これの面積は $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{3x-2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{2}{3}(3x-2)+\frac{1}{3}}{3x-2}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3(x-\frac{2}{3})}\right\}dx=\left[\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\log\left(\frac{2}{3}-x\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\log\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{9}\log\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}(-\log2-\cancel{\log3}-\log2+\cancel{\log3})$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9}\log2$