東工大　2005前期　①

(1) $a_n=\int_1^e(\log x)^n dx=\int_1^e(x)'(\log x)^n dx=\left[x(\log x)^n\right]_1^e-\int_1^e x\,n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}dx=e-na_{n-1}$ —①

①より. $a_{n-1}=e-(n-1)a_{n-2}$ —②

①,②より. $a_n+na_{n-1}=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}$, $a_n=(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1})$

(2) $\log 1=0$, $1<x<e$ のとき $0<\log x<1$, $(\log x)^n>(\log x)^{n+1}$, $\log e=1$ であるから

$$\int_1^e(\log x)^n dx>\int_1^e(\log x)^{n+1}dx>0.$$

よって $a_n>a_{n+1}>0$

(3) (1)(2)より. $a_n=(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1})<(n-1)(a_{n-2}-a_n)$. $na_n<(n-1)a_{n-2}$. $a_n<\frac{n-1}{n}a_{n-2}$

よって. $a_{2n}<\frac{2n-1}{2n}a_{2n-2}<\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}a_{2n-4}<\cdots<\frac{3\cdot5\cdots(2n-1)}{4\cdot6\cdots(2n)}a_2$

$a_2=\int_1^e(\log x)^2dx=\int_1^e(x)'(\log x)^2dx=\left[x(\log x)^2\right]_1^e-\int_1^e x\cdot2\log x\frac{1}{x}dx$

$=e-2\int_1^e(x)'\log x\,dx=e-2\left[x\log x\right]_1^e+2\int_1^e x\frac{1}{x}dx=e-2e+2(e-1)=e-2$ であるから.

$a_{2n}<\frac{3\cdot5\cdots(2n-1)}{4\cdot6\cdots(2n)}(e-2)$