東工大　2005前期　④

(1) x, yが任意の値をとるとき、

x, yを解に持つXの2次方程式$(X-x)(X-y)=0$、$X^2-(x+y)X+xy=0$を作ることができるから

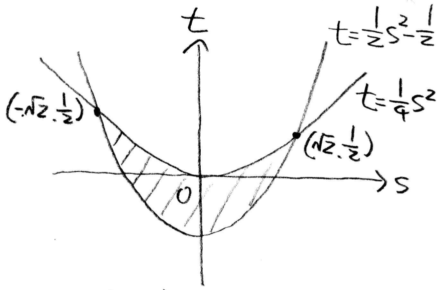
$(x+y)^2-4xy \geqq 0$、$s^2-4t \geqq 0$ ―①

s, tが$s^2-4t \geqq 0$を満たす任意の値をとるとき、

Xの2次方程式$X^2-sX+t=0$の解をx, yとすると、$x+y=s$、$xy=t$ ―②

①②より、x, yが任意の値をとるときs, tは、$s^2-4t \geqq 0$、$t \leqq \frac{1}{4}s^2$を満たす任意の値をとる ―③

$x^2+y^2 \leqq 1$より、$(x+y)^2-2xy \leqq 1$、$s^2-2t \leqq 1$、$t \geqq \frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}$ ―④

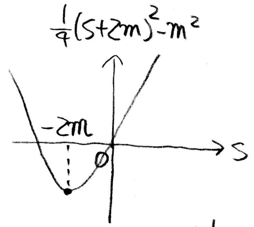


③④より、
点(s, t)の動く範囲は左図の斜線部である。
境界線上の点含む。

$\frac{1}{4}s^2=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}s^2=\frac{1}{2}$、$s=\pm\sqrt{2}$、$t=\frac{1}{2}$

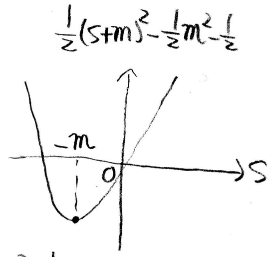
(2) sの値を固定して考えると、

$t+ms$の、最大値は$\frac{1}{4}s^2+ms$ ―⑤、最小値は$\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}+ms$ ―⑥



⑤より、$\frac{1}{4}s^2+ms=\frac{1}{4}(s^2+4ms+4m^2)-m^2=\frac{1}{4}(s+2m)^2-m^2$より、

最大値は、$s=\sqrt{2}$のとき$\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$



⑥より、$\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}+ms=\frac{1}{2}(s^2+2ms+m^2)-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(s+m)^2-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}$より、

最小値は　$0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$のとき、$s=-m$のとき$-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}$

$m>\sqrt{2}$のとき、$s=-\sqrt{2}$のとき$-\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$

よって、$xy+m(x+y)$の最大値は$\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$、最小値は　$0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$のとき$-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}$

$m>\sqrt{2}$のとき$-\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$