東工大 2005後期 ①

(1) $\log nr^n=\log n+n\log r=n\left(\frac{\log n}{n}+\log r\right)$, $\lim_{n\to\infty}\log nr^n=-\infty$ より $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$

$\log n^2r^n=2\log n+n\log r=n\left(2\frac{\log n}{n}+\log r\right)$, $\lim_{n\to\infty}\log n^2r^n=-\infty$ より $\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$

(2) (i) $\lim_{m\to\infty}S_m$

(i-i) $r=1$ のとき, $S_m=1+2+\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1)$. $\lim_{m\to\infty}S_m=\infty$

(i-ii) $r\neq1$ のとき,

$$\begin{array}{rl} & S_m=r+2r^2+\cdots+mr^m \\ - & rS_m=r^2+2r^3+\cdots+mr^{m+1} \\ \hline & (1-r)S_m=r+r^2+\cdots+r^m-mr^{m+1}=\frac{r(1-r^m)}{1-r}-mr^{m+1} \end{array}$$

$S_m=\frac{r(1-r^m)}{(1-r)^2}-\frac{r}{1-r}mr^m$

$r=0$ のとき. $S_m=0$. $\lim_{m\to\infty}S_m=0$.

$0<r<1$ のとき. (1)より. $\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{r}{(1-r)^2}$

$-1<r<0$ のとき. $\lim_{m\to\infty}|mr^m|=\lim_{m\to\infty}m|r|^m\underset{\downarrow\,(1)\text{より}}{=}0$ より. $\lim_{m\to\infty}mr^m=0$ であるから $\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{r}{(1-r)^2}$

$S_m=r^m\left\{-\frac{r}{(1-r)^2}-\frac{mr}{1-r}\right\}+\frac{r}{(1-r)^2}=mr^m\left\{-\frac{r}{1-r}-\frac{r}{(1-r)^2}\frac{1}{m}\right\}+\frac{r}{(1-r)^2}$

$r>1$ のとき. $-\frac{r}{1-r}>0$ より. $\lim_{m\to\infty}S_m=\infty$

$r<-1$ のとき. $-\frac{r}{1-r}>0$ より. $\lim_{m\to\infty}S_m$ は存在しない.

$r=-1$ のとき. $S_m=m(-1)^m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{4}$ より $\lim_{m\to\infty}S_m$ は存在しない

以上より

$$\lim_{m\to\infty}S_m=\begin{cases}\infty & (r\geqq1)\\ \frac{r}{(1-r)^2} & (-1<r<1)\\ \text{存在しない} & (r\leqq-1)\end{cases}$$

(ii) $\lim_{n\to\infty}T_n$

(ii-i) $r=1$ のとき. $T_n=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{2}n(n+1)$. $\lim_{n\to\infty}T_n=\infty$

(ii-ii) $r\neq1$ のとき.

$$\begin{array}{rl} & T_n=r+(1+2)r^2+\cdots+(1+2+\cdots+n)r^n \\ - & rT_n=r^2+(1+2)r^3+\cdots+(1+2+\cdots+n)r^{n+1} \\ \hline & (1-r)T_n=r+2r^2+\cdots+nr^n-\frac{1}{2}n(n+1)r^{n+1}=S_n-\frac{r}{2}n^2r^n-\frac{r}{2}nr^n \end{array}$$

$T_n=\frac{1}{1-r}S_n-\frac{r}{2(1-r)}n^2r^n-\frac{r}{2(1-r)}nr^n$

$r=0$ のとき. $T_n=0$. $\lim_{n\to\infty}T_n=0$

$0<r<1$ のとき. (1)より. $\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{r}{(1-r)^3}$

$-1<r<0$ のとき. $\lim_{n\to\infty}|n^2r^n|=\lim_{n\to\infty}n^2|r|^n\underset{\downarrow\,(1)\text{より}}{=}0$ より. $\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$ であるから. $\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{r}{(1-r)^3}$

$T_n=r^n\left\{-\frac{r}{(1-r)^3}-\frac{nr}{(1-r)^2}\right\}+\frac{r}{(1-r)^3}-\frac{n^2r}{2(1-r)}r^n-\frac{nr}{2(1-r)}r^n=n^2r^n\left\{-\frac{r}{2(1-r)}-\frac{r}{(1-r)^2}\frac{1}{n}-\frac{r}{2(1-r)}\frac{1}{n}-\frac{r}{(1-r)^3}\frac{1}{n^2}\right\}+\frac{r}{(1-r)^3}$

$r>1$ のとき $-\frac{r}{2(1-r)}>0$ より $\lim_{n\to\infty}T_n=\infty$

$r<-1$ のとき $-\frac{r}{2(1-r)}>0$ より. $\lim_{n\to\infty}T_n$ は存在しない

$r=-1$ のとき. $T_n=n^2(-1)^n\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{n}+\frac{1}{4}\frac{1}{n}+\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}$ より.

$\lim_{n\to\infty}T_n$ は存在しない.

以上より

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\begin{cases}\infty & (r\geqq1)\\ \frac{r}{(1-r)^3} & (-1<r<1)\\ \text{存在しない} & (r\leqq-1)\end{cases}$$