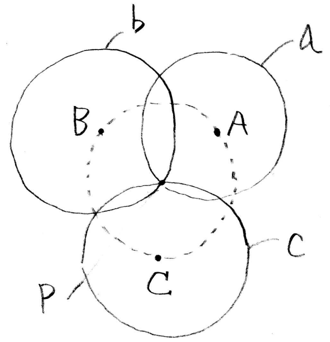
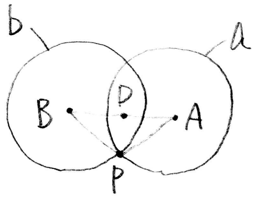
東工大　2006前期　③



3個の円板を a.b.c，これらの中心を A.B.C として

$\angle APB=\alpha$，$\angle BPC=\beta$，$\angle CPA=\gamma$ とする.



ABの中点をDとする

$\angle PAD=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\pi$，$PD=\cos\frac{1}{2}\alpha$，$AD=\sin\frac{1}{2}\alpha$ であるから.

a.bの交わりの面積は $2\left(\pi\frac{-\alpha+\pi}{2\pi}-2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha\frac{1}{2}\right)=-\alpha+\pi-\sin\alpha$

同様に. b.cの交わりの面積は $-\beta+\pi-\sin\beta$，c.aの交わりの面積は $-\gamma+\pi-\sin\gamma$

$$S=3\pi+\alpha-\pi+\sin\alpha+\beta-\pi+\sin\beta+\gamma-\pi+\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+2\pi$$

$$=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2}\right)+\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\beta-\gamma}{2}\right)+2\pi$$

$$=\sin\alpha+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cancel{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cancel{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}+2\pi$$

$$=\sin\alpha+2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+2\pi=\sin\alpha+2\sin\frac{2\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+2\pi=\sin\alpha+2\sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+2\pi$$

(b)より. $0\leqq\beta\leqq\pi$，$0\leqq\gamma\leqq\pi$ であるから. αを固定したとき、Sは$\beta=\gamma$のとき、最大値 $\sin\alpha+2\sin\frac{1}{2}\alpha+2\pi$ をとる.

(b)より. $0\leqq\alpha\leqq\pi$

$f(\alpha)=\sin\alpha+2\sin\frac{1}{2}\alpha+2\pi$　$(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とする.

$f'(\alpha)=\cos\alpha+\cos\frac{1}{2}\alpha$，$f'(\alpha)=0$のとき. $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\frac{\alpha}{2}=0$，$2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}-1=0$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm3}{4}=-1,\frac{1}{2}$.　$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{3}$.　$\alpha=\frac{2}{3}\pi$

α	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\alpha)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(\alpha)$	2π	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\pi$	$\searrow$	$2+2\pi$

$f(\alpha)$の増減表は左表のようになる.

よって. Sの最大値は $\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\pi$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi=\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\pi$