東工大　2006後期　②

(1) $a=\frac{b^3}{3}$, $\frac{b^3}{3}$, bは自然数であるから $b=3B$ (Bは自然数) とおける. よって $a=\frac{27B^3}{3}=3\cdot3B^3$ —①

$a=\frac{c^2}{5}$, $\frac{c^2}{5}$, cは自然数であるから. $c=5C$ (Cは自然数) とおける. よって $a=\frac{25C^2}{5}=5\cdot C^2$ —②

①②より題意は示された.

(2) $a=3^{\alpha}\cdot5^{\beta}\cdot A^{\gamma}$ (Aは3でも5でも割り切れない自然数, α, β, γは自然数) とおく.

$3a=b^3$より. $3^{\alpha+1}\cdot5^{\beta}\cdot A^{\gamma}=b^3$　よって. $\alpha+1$, β, γ は 3の倍数

$5a=c^2$より. $3^{\alpha}\cdot5^{\beta+1}\cdot A^{\gamma}=c^2$　よって α, $\beta+1$, γは 2の倍数

αは2の倍数, $\alpha+1$は3の倍数であるから. $\alpha=2, 8, 14\cdots$　, $\alpha=2+6x$ ($x=0, 1, 2\cdots$) とおける.

βは3の倍数. $\beta+1$は2の倍数であるから $\beta=3, 9, 15\cdots$　, $\beta=3+6y$ ($y=0, 1, 2\cdots$) とおける.

γは2の倍数かつ3の倍数であるから $\gamma=6z$ ($z=1, 2\cdots$) とおける

よって. $a=3^{2+6x}\cdot5^{3+6y}\cdot A^{6z}=3^2\cdot5^3\cdot(3^x5^yA^z)^6$

題意より. $3^x\cdot5^y\cdot A^z=1$ でなければならなく.

$x=0$. $y=0$. zは任意の自然数. $A=1$ とすれば $3^x\cdot5^y\cdot A^z=1$ となる.

よって $a=3^2\cdot5^3$

以上より.題意は示された.

(3). (2)より $a=1125$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ \ 9 \\ \hline 1125 \end{array}$$