東工大 2007前期 ①

(1) p^mで割り切れるものは $\dfrac{p^{n+1}}{p^m}=p^{-m+n+1}$個

p^{m+1}で割り切れるものは $\dfrac{p^{n+1}}{p^{m+1}}=p^{-m+n}$個

p^mで割り切れないでp^{m+1}で割り切れるものは存在しないから、

p^mで割り切れ、p^{m+1}で割り切れないものの個数は、$p^{-m+n+1}-p^{-m+n}=p^{-m+n}(p-1)$個

(2) 1からp^{n+1}までの整数の中で

p^mで割り切れ、p^{m+1}で割り切れないものからなる集合をA_m $(m=0,1\dots n)$

p^{n+1}のみからなる集合をA_{n+1}、とすると

$A_0, A_1 \dots A_{n+1}$は共通部分を持たず、1, 2 … p^{n+1}はこれらのうちのどれか1つに必ず属し、

A_m $(m=0,1\dots n)$の要素の個数は(1)より、$p^{-m+n}(p-1)$個、A_{n+1}の要素の個数は1個

xがA_m $(m=0,1\dots n+1)$に属する整数のとき、

yはp^{n+1-m}で割り切れるものであればよく、これは$\dfrac{p^{n+1}}{p^{n+1-m}}=p^m$個ある。

以上より、求める値は

$$\sum_{m=0}^{n}p^{-m+n}(p-1)p^m+p^{n+1}=p^n(p-1)(n+1)+p^{n+1}=p^n(np+p-n-1+p)=p^n\{(n+2)p-(n+1)\}$$