東工大　2009前期　②

fを表す行列は $\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}$

(1)より Lは $x=0$ または $y=kx+1$ と書ける

(i) $x=0$ 上の点 $(0, \alpha)$ は fにより $\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-2)\alpha \\ a\alpha \end{pmatrix}$ に移る

これが $x=0$ 上にあるならば $(a-2)\alpha=0$. $a=2$

(ii) $y=kx+1$ 上の点 $(\alpha, k\alpha+1)$ は fにより $\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ k\alpha+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\alpha+ak\alpha+a-2k\alpha-2 \\ a\alpha-2\alpha+ak\alpha+a \end{pmatrix}$ に移る

これが $y=kx+1$ 上にあるならば

$a\alpha-2\alpha+\cancel{ak\alpha}+a=\cancel{ak\alpha}+ak^2\alpha+ak-2k^2\alpha-2k+1$

$(ak^2-2k^2-a+2)\alpha+ak-2k+1-a=0$

$\begin{cases} (a-2)k^2-a+2=0 & —① \\ (a-2)k-a+1=0 & —② \end{cases}$

$a=2$のとき ②は成り立たないから $a\neq 2$. ②より $(a-2)k=a-1$. $k=\dfrac{a-1}{a-2}$

このとき ①が成り立つならば $\cancel{(a-2)}\dfrac{(a-1)^2}{(a-2)^{\cancel{2}}}-a+2=0$　　$\dfrac{a^2-2a+1+(-a+2)(a-2)}{a-2}=0$

$\cancel{a^2}-\cancel{2a}+1-\cancel{a^2}+\cancel{2a}+2a-4=0$. $2a=3$　$a=\dfrac{3}{2}$

(i)(ii)より　$a=\dfrac{3}{2}, 2$