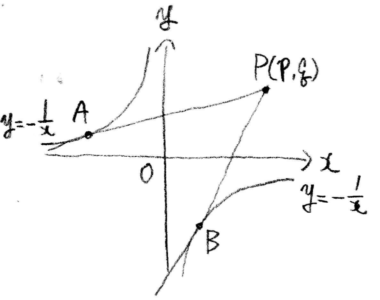
東工大 2009後期 ②



$y=-\frac{1}{x}$ 上の点 $(X, -\frac{1}{X})$ における接線の方程式は

$y+\frac{1}{X}=\frac{1}{X^2}(x-X)$. $X^2y+X=x-X$

これが (p, q) を通るから $qX^2+X=p-X$. $X^2+\frac{2}{q}X-\frac{p}{q}=0$ —①

A, Bの座標を $(\alpha, -\frac{1}{\alpha})$, $(\beta, -\frac{1}{\beta})$ $(\alpha<\beta)$ とすると、

$\overrightarrow{PA}=(\alpha-p, -\frac{1}{\alpha}-q)$, $\overrightarrow{PB}=(\beta-p, -\frac{1}{\beta}-q)$ より

三角形PABの面積は $\frac{1}{2}\left|(\alpha-p)(-\frac{1}{\beta}-q)-(-\frac{1}{\alpha}-q)(\beta-p)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{\alpha}{\beta}-\alpha q+\frac{p}{\beta}+\cancel{pq}+\frac{\beta}{\alpha}-\frac{p}{\alpha}+\beta q-\cancel{pq}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}+(\beta-\alpha)q+p\frac{-\beta+\alpha}{\alpha\beta}\right|=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left|\frac{\alpha+\beta-p}{\alpha\beta}+q\right|$ —②

α, β は①の解であるから $\alpha+\beta=-\frac{2}{q}$, $\alpha\beta=-\frac{p}{q}$. $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4}{q^2}+4\frac{p}{q}=\frac{4}{q^2}(pq+1)$

$\beta-\alpha>0$ より $\beta-\alpha=\frac{2}{q}\sqrt{pq+1}$

② $=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{q}\sqrt{pq+1}\left|\frac{-\frac{2}{q}-p}{-\frac{p}{q}}+q\right|=\frac{\sqrt{pq+1}}{q}\left|\frac{pq+2}{p}+q\right|=\frac{\sqrt{pq+1}}{q}\left(2q+\frac{2}{p}\right)=2\sqrt{pq+1}\left(1+\frac{1}{pq}\right)=2\sqrt{t+1}\left(\frac{1}{t}+1\right)$

$S(t)=2\sqrt{t+1}\left(\frac{1}{t}+1\right)$ $(t>0)$ とすると

$S'(t)=2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+1}}\left(\frac{1}{t}+1\right)+2\sqrt{t+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{t+t^2-2(t+1)}{t^2\sqrt{t+1}}=\frac{t^2-t-2}{t^2\sqrt{t+1}}=\frac{(t+1)(t-2)}{t^2\sqrt{t+1}}$ より $S'(t)=0$ のとき $t=2$

t	…	2	…
$S'(t)$	−	0	+
$S(t)$	↘	$3\sqrt{3}$	↗

$S(t)$ の増減表は左表

よって、この面積の最小値は $3\sqrt{3}$

※ $S(2)=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)=3\sqrt{3}$