

4 関数 $f(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を次の漸化式により定める .

$$f_1(x) = x^2, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^3 f_n^{(2)}(x)$$

ただし, $f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す .

(1) $f_n(x)$ は $(n + 1)$ 次多項式であることを示し, x^{n+1} の係数を求めよ .

(2) $f_n^{(1)}(0)$, $f_n^{(2)}(0)$, $f_n^{(3)}(0)$, $f_n^{(4)}(0)$ を求めよ .