

5 a は $0 < a \leq \frac{\pi}{4}$ を満たす実数とし, $f(x) = \frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - ax\right)$ とする.
 このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式 (*) を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ.

$$(*) \quad \int_0^1 f(x) dx = 1$$

(2) $0 \leq b < c \leq 1$ を満たす実数 b, c について, 不等式

$$f(b)(c - b) \leq \int_b^c f(x) dx \leq f(c)(c - b)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の試行を考える.

(試行) n 個の数 $1, 2, \dots, n$ を出目とする, あるルーレットを k 回まわす.

この (試行) において, 各 $i = 1, 2, \dots, n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし,

$$(**) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$$

が成り立つとする. このとき, (1) の等式 (*) が成り立つことを示せ.

(4) (3) の (試行) において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし, $A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n,k}$ とする.

(**) が成り立つとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ.