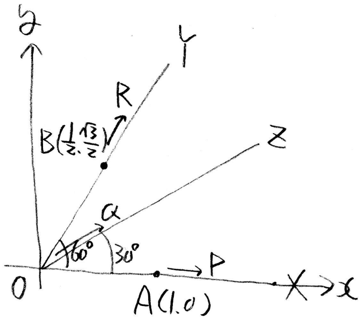
東大理科　1961前期　①



左図のように xy 座標をとり A、B の座標を $(1,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ とする

Pの座標は $(1,0)+t(1,0)=(t+1,0)$

Qの座標は $\sqrt{3}t\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}t,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

Rの座標は $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(t+\frac{1}{2},\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(i) P,Q,Rが一直線上にあるとき

$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{2}t-1,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $\overrightarrow{PR}=\left(-\frac{1}{2},\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$ となればよいから

$$\begin{cases} k\left(\frac{1}{2}t-1\right)=-\frac{1}{2} & \text{—①} \\ k\frac{\sqrt{3}}{2}t=\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{—②} \end{cases}$$

①より $k(t-2)=-1$. —①'

②より $\frac{1}{2}kt=t+\frac{1}{2}$　$kt=2t+1$ —②'

$t\neq 2$として ①'より $k=\frac{-1}{t-2}$

②'より $\frac{-1}{t-2}t=2t+1$. $-t=(2t+1)(t-2)$　$-t=2t^2-4t+t-2$, $t^2-t-1=0$

$t=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　$t>0$より $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって求める時間は $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 秒

(ii) △PQRの面積は $\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}t-1\right)\left(\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}t\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}t^2+\frac{\sqrt{3}}{4}t-\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}t\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}t^2-\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}|t^2-t-1|$

△AOBの面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$

よって $|t^2-t-1|=1$ であればよい

$t^2-t-1=1$ のとき $t^2-t-2=0$. $t=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=-1,2$, $t>0$より $t=2$

$t^2-t-1=-1$ のとき $t^2-t=0$. $t(t-1)=0$. $t=0,1$　$t>0$より $t=1$

よって求める時間は 1秒, 2秒