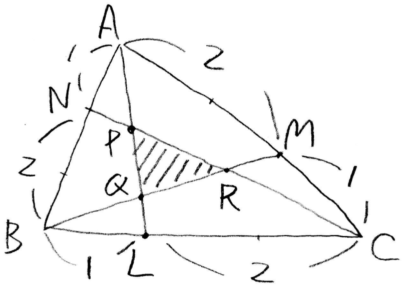
東大理科 1961前期 ④



$\frac{AP}{AL}$ を求める

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{BA}+k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=(-k+1)\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+l\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+l\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{3}l\overrightarrow{BA}+(-l+1)\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ は線形独立より $\begin{cases}-k+1=\frac{2}{3}l\\ \frac{1}{3}k=-l+1\end{cases}$

$l=-\frac{3}{2}k+\frac{3}{2}$ より $\frac{1}{3}k=\frac{3}{2}k-\frac{3}{2}+1$ $\quad \frac{9-2}{6}k=\frac{1}{2}$ $\quad k=\frac{6}{7}\frac{1}{2}=\frac{3}{7}$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AL}$ より $\frac{AP}{AL}=\frac{3}{7}$

$\frac{AQ}{AL}$ を求める.

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{CA}+k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=(-k+1)\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CB}+l\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}+l\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{3}l\overrightarrow{CA}+(-l+1)\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ は線形独立より $\begin{cases}-k+1=\frac{1}{3}l\\ \frac{2}{3}k=-l+1\end{cases}$

$l=-3k+3$ より $\frac{2}{3}k=3k-3+1$ $\quad \frac{7}{3}k=2$ $\quad k=\frac{6}{7}$

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CA}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AL}$ より $\frac{AQ}{AL}=\frac{6}{7}$

ゆえに $AP:PQ:QL=3:3:1$

対称性より $BQ:QR:RM=3:3:1$, $CR:RP:PN=3:3:1$

$\frac{\triangle ALC}{\triangle ABC}=\frac{2}{3}$, $\frac{\triangle PLC}{\triangle ALC}=\frac{4}{7}$, $\frac{\triangle PQC}{\triangle PLC}=\frac{3}{4}$, $\frac{\triangle PQR}{\triangle PQC}=\frac{1}{2}$

よって $\triangle PQR=\frac{1}{2}\triangle PQC=\frac{1}{2}\frac{3}{4}\triangle PLC=\frac{3}{8}\frac{4}{7}\triangle ALC=\frac{3}{14}\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{1}{7}\triangle ABC$

$\triangle PQR:\triangle ABC=1:7$