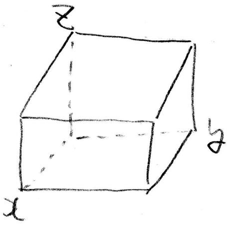
東大理科　1962 前期 5




(i) $x+y+z=6$

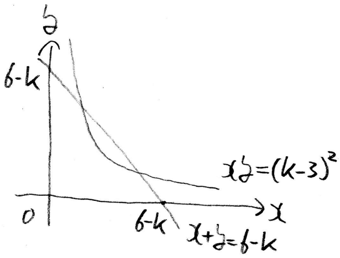
$2xy+2yz+2zx=18$ より $xy+yz+zx=9$

$z=k$ $(0<k<6)$ であるとする.

$x+y=6-k$ —①

$xy+k(6-k)=9$. $xy=k^2-6k+9$. $xy=(k-3)^2$ —②

①②が交点を持つとき直方体が存在する.




$0<k<3$ のとき

$3-k \leqq \frac{6-k}{2}$, $6-2k \leqq 6-k$. $k \geqq 0$ であればよいから $0<k<3$

$3<k<6$ のとき

$k-3 \leqq \frac{6-k}{2}$, $2k-6 \leqq 6-k$, $3k \leqq 12$. $k \leqq 4$ であればよいから $3<k \leqq 4$

よって $0<z<3$, $3<z \leqq 4$

対称性より $x, y, z$ のとりうる値の範囲は等しいから $0<x<3$, $3<x \leqq 4$

(ii) 直方体の体積は $xyz=(z-3)^2z=z^3-6z^2+9z$

$f(z)=z^3-6z^2+9z$ とすると.

$f'(z)=3z^2-12z+9$. $f'(z)=0$ のとき $z^2-4z+3=0$. $(z-1)(z-3)=0$ $z=1, 3$

| $z$ | 0 | … | 1 | … | 3 | … | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(z)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(z)$ | 0 | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | 4 |

$f(z)$ の増減表は左表のようになる.

これと(i)より. 直方体の体積の最大値は 4

$f(3)=27-54+27=0$

$f(4)=64-96+36=4$