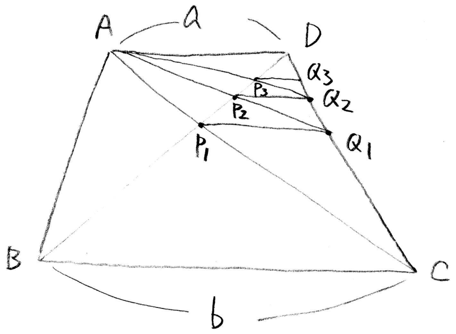
東大理科　1963前期　③



(1) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{a}{a+x_n}$,　$\dfrac{a+x_n}{ax_n}=\dfrac{1}{x_{n+1}}$,　$\dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{a}$

よって $n\geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{a}$$
$$\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{x_{n-2}}+\frac{1}{a}$$
$$\vdots$$
$$+)\ \frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{a}$$
$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+\frac{n-1}{a}$$

$\dfrac{x_1}{b}=\dfrac{a}{a+b}$,　$x_1=\dfrac{ab}{a+b}$ より

$$x_n=\frac{1}{\frac{a+b}{ab}+\frac{n-1}{a}}=\frac{ab}{a+\cancel{b}+bn-\cancel{b}}=\frac{ab}{a+bn}$$

これは $n=1$ のときも成立つ

(2) $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}=\dfrac{x_{n+2}\cdot \cancel{x_{n+1}}}{\cancel{x_{n+1}}\cdot x_n}=\dfrac{\frac{ab}{a+b(n+2)}}{\frac{ab}{a+bn}}=\dfrac{a+bn}{a+b(n+2)}$

よって $n\geqq 3$ のとき

$$\frac{F_n}{\cancel{F_{n-1}}}\frac{\cancel{F_{n-1}}}{\cancel{F_{n-2}}}\frac{\cancel{F_{n-2}}}{\cancel{F_{n-3}}}\cdots\frac{\cancel{F_3}}{\cancel{F_2}}\frac{\cancel{F_2}}{F_1}=\frac{a+\cancel{b(n-1)}}{a+b(n+1)}\frac{\cancel{a+b(n-2)}}{a+bn}\frac{\cancel{a+b(n-3)}}{\cancel{a+b(n-1)}}\cdots\frac{a+2b}{\cancel{a+4b}}\frac{a+b}{\cancel{a+3b}}$$

$$\frac{F_n}{F_1}=\frac{(a+2b)(a+b)}{\{a+b(n+1)\}(a+bn)}$$

台形の高さを H, F_1の高さを h とおくと　$\dfrac{h}{H}=\dfrac{a}{a+b}$,　$h=\dfrac{aH}{a+b}$

$F_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{ab}{a+2b}\dfrac{aH}{a+b}$,　$F_2=\dfrac{\cancel{a+b}}{a+3b}\dfrac{1}{2}\dfrac{ab}{a+2b}\dfrac{aH}{\cancel{a+b}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2bH}{(a+3b)(a+2b)}$

$F_n=\dfrac{\cancel{(a+2b)}\cancel{(a+b)}}{\{a+b(n+1)\}(a+bn)}\dfrac{1}{2}\dfrac{ab}{\cancel{a+2b}}\dfrac{aH}{\cancel{a+b}}=\dfrac{a^2bH}{2\{a+b(n+1)\}(a+bn)}$,　これは $n=1, 2$ のときも成立つ

$\dfrac{1}{a+bn}-\dfrac{1}{a+b(n+1)}=\dfrac{\cancel{a}+\cancel{bn}+b-\cancel{a}-\cancel{bn}}{(a+bn)\{a+b(n+1)\}}=\dfrac{b}{(a+bn)\{a+b(n+1)\}}$　より

$$F_1+F_2+\cdots+F_n=\frac{a^2H}{2}\left\{\frac{1}{a+b}-\cancel{\frac{1}{a+2b}}+\cancel{\frac{1}{a+2b}}-\frac{1}{a+3b}+\cdots+\frac{1}{a+bn}-\frac{1}{a+b(n+1)}\right\}$$
$$=\frac{a^2H}{2}\left\{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b(n+1)}\right\}$$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2H}{2}\left\{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b(n+1)}\right\}=\frac{a^2H}{2(a+b)}$$