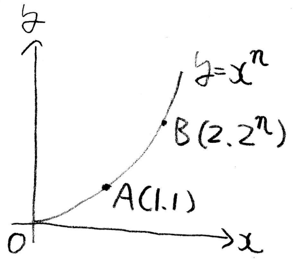
東大理科　1963前期　6



放物線の方程式を $y=ax^2+bx$ とおく.

$\begin{cases} 1=a+b \\ 2^n=4a+2b \end{cases}$　$2^{n-1}=2(-b+1)+b$,　$b=-2^{n-1}+2$

$a=-b+1=2^{n-1}-2+1=2^{n-1}-1$

よって放物線の方程式は $y=(2^{n-1}-1)x^2-(2^{n-1}-2)x$

$S_1=S_2$ のとき

$\int_0^2\{x^n-(2^{n-1}-1)x^2+(2^{n-1}-2)x\}dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-(2^{n-1}-1)\frac{x^3}{3}+(2^{n-1}-2)\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{2^{n+1}}{n+1}-(2^{n-1}-1)\frac{8}{3}+(2^{n-1}-2)\frac{4}{2}$

$=\frac{2}{n+1}2^n-\frac{4}{3}2^n+\frac{8}{3}+2^n-4=\left(\frac{2}{n+1}-\frac{1}{3}\right)2^n-\frac{4}{3}=0$ であればよい.

$n=3$ のとき $\left(\frac{2}{n+1}-\frac{1}{3}\right)2^n-\frac{4}{3}=\frac{3-2}{6}8-\frac{4}{3}=0$.

$n=4$ のとき $\left(\frac{2}{n+1}-\frac{1}{3}\right)2^n-\frac{4}{3}=\frac{6-5}{15}16-\frac{4}{3}=\frac{16-20}{15}=-\frac{4}{15}$

$n\geqq5$ のとき $\left(\frac{2}{n+1}-\frac{1}{3}\right)2^n-\frac{4}{3}<0$.

よって $n=3$.