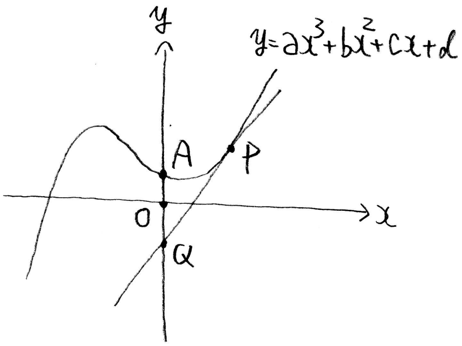
東大文科　1964前期 ⑤



Aの座標は$(0,d)$

Pのx座標をtとすると

Pにおける曲線の接線の方程式は

$y-(at^3+bt^2+ct+d)=(3at^2+2bt+c)(x-t)$

$x=0$とすると $y=-3at^3-2bt^2-\cancel{ct}+at^3+bt^2+\cancel{ct}+d$

$\qquad=-2at^3-bt^2+d$ となるから

Qの座標は$(0,-2at^3-bt^2+d)$

$AP^2=t^2+(at^3+bt^2+ct+\cancel{d}-\cancel{d})^2=t^2+a^2t^6+b^2t^4+c^2t^2+2abt^5+2act^4+2bct^3$

$\quad=a^2t^6+2abt^5+(2ac+b^2)t^4+2bct^3+(c^2+1)t^2$

$AQ^2=(\cancel{d}+2at^3+bt^2-\cancel{d})^2=4a^2t^6+4abt^5+b^2t^4$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{AQ^2}{AP^2}=\lim_{t\to 0}\frac{4a^2t^4+4abt^3+b^2t^2}{a^2t^4+2abt^3+(2ac+b^2)t^2+2bct+c^2+1}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{AQ^2}{AP^2}=0$

$\displaystyle\lim_{t\to \infty}\frac{AQ^2}{AP^2}=\lim_{t\to \infty}\frac{4a^2+\frac{4ab}{t}+\frac{b^2}{t^2}}{a^2+\frac{2ab}{t}+\frac{2ac+b^2}{t^2}+\frac{2bc}{t^3}+\frac{c^2+1}{t^4}}=4$ より $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{AQ^2}{AP^2}=4$