東大理科　1964前期　①

a, b, c は x についての3次方程式 $x^3-zx^2-yx-x=0$ —① の相異なる3つの解である。

①は $(x-a)(x-b)(x-c)=0$

$\{x^2-(a+b)x+ab\}(x-c)=0$

$x^3-cx^2-(a+b)x^2+(bc+ca)x+abx-abc=0$

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$ と書けるから

$$\begin{cases} a+b+c=z \\ ab+bc+ca=-y \\ abc=x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= 3x+(a+b+c)y+(a^2+b^2+c^2)z \\ &= 3x+(a+b+c)y+\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}z \\ &= 3x+yz+(z^2+2y)z \\ &= 3x+3yz+z^3 \end{aligned}$$