東大理科　1964前期　⑥

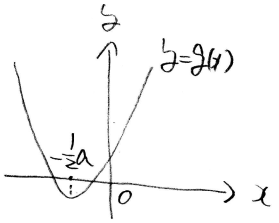
(1)より. $1+a+b=4$. $b=-a+3$.

$f(x)=x^3+ax^2+(-a+3)x$

$g(x)=x^2+ax-a+3=x^2+ax+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2-a+3=\left(x+\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{4}a^2-a+3$ とする.

(2)より. $x\geqq 0$ のとき $g(x)\geqq 0$ であればよい.

(i) $a\geqq 0$ のとき

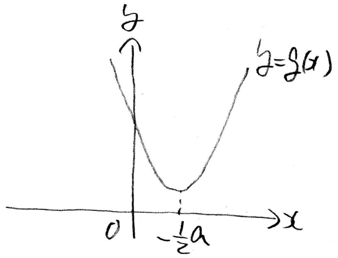


$g(0)\geqq 0$ であればよい.

$-a+3\geqq 0$. $a\leqq 3$

よって $0\leqq a\leqq 3$

(ii) $a\leqq 0$ のとき



$-\frac{1}{4}a^2-a+3\geqq 0$ であればよい.

$a^2+4a-12\leqq 0$. $(a+6)(a-2)\leqq 0$. $-6\leqq a\leqq 2$

よって $-6\leqq a\leqq 0$

(i)(ii)より. $-6\leqq a\leqq 3$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\{x^3+ax^2+(-a+3)x\}dx=\left[\frac{x^4}{4}+a\frac{x^3}{3}+(-a+3)\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}a+\frac{7}{4}$.

よって $\int_0^1 f(x)dx$ は. $a=-6$. $b=9$ のとき最大値を. $a=3$. $b=0$ のとき最小値をとる.