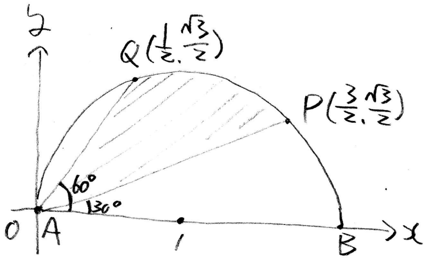
東大理科　1965前期　⑥



左図のようにxy座標をとる

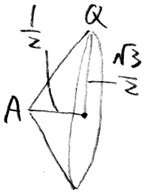
半円の方程式は $(x-1)^2+y^2=1\ (y\geqq 0)$.

直線APの方程式は $y=\frac{1}{\sqrt3}x$ であるから

$x^2-2x+1+\frac13x^2=1$ $\frac43x=2$. $x=\frac32$. $y=\frac{\sqrt3}{2}$ より Pの座標は $(\frac32,\frac{\sqrt3}{2})$

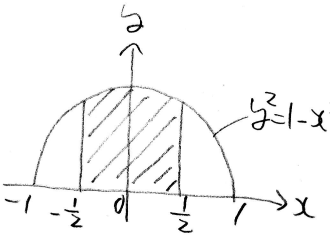
直線AQの方程式は $y=\sqrt3x$ であるから

$x^2-2x+1+3x^2=1$. $4x=2$ $x=\frac12$. $y=\frac{\sqrt3}{2}$ より Qの座標は $(\frac12,\frac{\sqrt3}{2})$



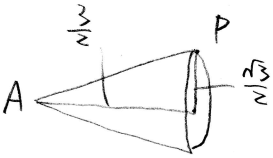
左の円すいの体積は

$\frac13\pi\frac34\frac12=\frac18\pi$



左図の斜線部をx軸のまわりに一回転して得られる立体の体積は

$2\int_0^{\frac12}\pi(1-x^2)dx=2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac12}=2\pi\left(\frac12-\frac1{24}\right)=\frac{11}{12}\pi$



左の円すいの体積は

$\frac13\pi\frac34\frac32=\frac38\pi$

よって求める体積は $\frac18\pi+\frac{11}{12}\pi-\frac38\pi=\frac{3+22-9}{24}\pi=\frac23\pi$