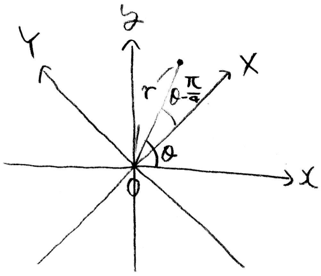
東大理科　1967前期　4



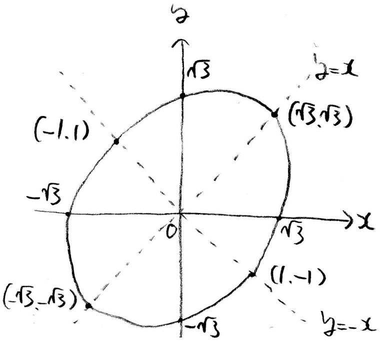
xy座標を原点を中心に$\frac{\pi}{4}$回転したXY座標を考える

xy座標で$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$と表される点は

XY座標で$\left(r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(r\left(\cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ r\left(\sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta,\ \frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta\right)$と表されるから

$X=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y,\ Y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y$とおくと、

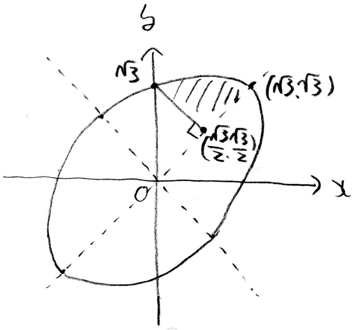


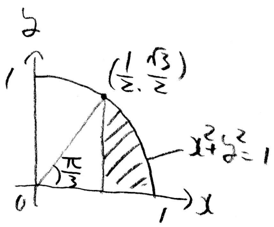
$\begin{cases}x+y=\sqrt{2}X\\-x+y=\sqrt{2}Y\end{cases}$　$2y=\sqrt{2}(X+Y)$　$y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$　$2x=\sqrt{2}(X-Y)$　$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$　より、

$x^2-xy+y^2=3$は、$\frac{X^2-\cancel{2XY}+Y^2}{2}-\frac{X^2-Y^2}{2}+\frac{X^2+\cancel{2XY}+Y^2}{2}=3$.

$X^2+3Y^2=6$.　$\frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{2}=1$　と書ける

よって略図は左図のようになる





左上図の斜線部の面積は、

上図の斜線部の面積　$\pi\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

の$\sqrt{2}\sqrt{6}=2\sqrt{3}$倍であるから　$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{3}{4}$.

$y=x$と$y=-x+\sqrt{3}$の交点は

$x=-x+\sqrt{3}$.　$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$より$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって求める面積は　$2\left(\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{3}{4}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$