

$$P(x) = Ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ とおす.}$$

1) f) 任意の k に対して $P(-k) = -P(k)$. $-Ak^3 + bk^2 - ck + d = -Ak^3 - bk^2 - ck - d$, $bk^2 + d = 0$ が成り立つから
 $b = 0, d = 0$

よって $P(x) = Ax^3 + cx$ とおす.

2) f) $P(x) = 0$ のとき $Ax^3 + cx = 0$. $(Ax^2 + c)x = 0$ とおす.

$Ax^2 + c = 0$ が $x = 0$ を解に持たないとはおす. $C \neq 0$. — ①

3) f) $P(x)$ は単調増加または単調減少

$P'(x) = 3Ax^2 + c$ とおすから, $A > 0$ かつ $C \geq 0$, または, $A < 0$ かつ $C \leq 0$.

① f) $A > 0$ かつ $C > 0$, または, $A < 0$ かつ $C < 0$ — ②

4) f) $P(\frac{1}{2}) = \frac{A}{8} + \frac{C}{2} = \frac{A+4C}{8}$ とおす. m をある整数とて $A+4C = 8m$ とおす — ③

5) f) $P(1) = A+C$ とおす $0 < A+C < 6$ — ④

②, ④ f) $A > 0$ かつ $C > 0$ — ⑤

③ f) A は 4 の倍数とおす. ④, ⑤ f) $A = 4$.

このとき ③, ④, ⑤ を満たす C は $C = 1$ のみである.

よって $P(x) = 4x^3 + x$