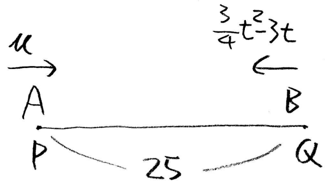
東大理科 1970前期 ③



最初のAの位置を0、Bの位置を25とする。

t秒後のAの位置は ut

t秒後のBの位置は $25+\int_0^t\left(\frac{3}{4}t^2-3t\right)dt=25+\left[\frac{3}{4}\frac{t^3}{3}-3\frac{t^2}{2}\right]_0^t=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25$

t	0	…	2	…	4	…
$f''(t)$	−	−	0	+	+	+
$f'(t)$	0	−	−	−	0	+
$f(t)$	25	↘	21	↘	17	↗

$f(2)=2-6+25=21$

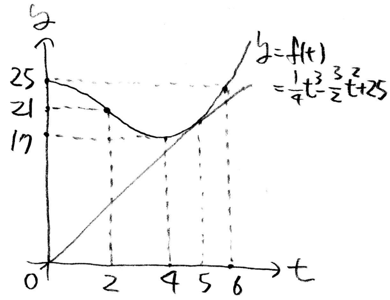
$f(4)=16-24+25=17$

$f(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25\ (t\geqq 0)$ とする。

$f'(t)=\frac{3}{4}t^2-3t$、$f'(t)=0$ のとき $\frac{3}{4}t^2-3t=0$. $\frac{3}{4}t(t-4)=0$. $t=0, 4$

$f''(t)=\frac{3}{2}t-3$、$f''(t)=0$ のとき $\frac{3}{2}t-3=0$. $t=2$.

$f(t)$ の増減表は左表のようになる。



$y=f(t)$ のグラフは左図のようになる。

$y=f(t)$ の接線の方程式は $y-\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{2}t^2-25=\left(\frac{3}{4}t^2-3t\right)(x-t)$

これとy軸との交点のy座標は $-\frac{3}{4}t^3+3t^2+\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2+25$.

これが0のとき $-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2+25=0$ $t^3-3t^2-50=0$

$(t-5)(t^2+2t+10)=0$. $(t-5)\{(t+1)^2+9\}=0$. $t=5$.

$$\begin{array}{r} t^2+2t+10 \\ t-5\overline{)\,t^3-3t^2\qquad-50} \\ t^3-5t^2\qquad\qquad \\ \hline 2t^2\qquad\quad \\ 2t^2-10t\quad \\ \hline 10t-50 \\ 10t-50 \\ \hline 0 \end{array}$$

$f(t)=25$ のとき $\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25=25$

$\frac{1}{4}t^2(t-6)=0$. $t=0, 6$

このときの接線の傾きは $\frac{75}{4}-15=\frac{75-60}{4}=\frac{15}{4}$

よって u は少なくとも $\frac{15}{4}$ m/秒 でなければならない。