東大理科　1971前期　⑥

k回目の直前に，3人残っている確率をP_k，2人残っている確率をQ_kとする.

紙を○，ハサミを△，石を×で表す.

3人のとき

○	○	○	3
○	○	△	1
○	○	×	2
○	△	○	1
○	△	△	2
○	△	×	3
○	×	○	2
○	×	△	3
○	×	×	1
△	○	○	1
△	○	△	2
△	○	×	3
△	△	○	2
△	△	△	3
△	△	×	1
△	×	○	3
△	×	△	1
△	×	×	2
×	○	○	2
×	○	△	3
×	○	×	1
×	△	○	3
×	△	△	1
×	△	×	2
×	×	○	1
×	×	△	2
×	×	×	3

2人のとき

○	○	2
○	△	1
○	×	1
△	○	1
△	△	2
△	×	1
×	○	1
×	△	1
×	×	2

左表より　$P_{k+1}=\dfrac{9}{27}P_k$.　$P_{k+1}=\dfrac{1}{3}P_k$ —①

$Q_{k+1}=\dfrac{9}{27}P_k+\dfrac{3}{9}Q_k$.　$Q_{k+1}=\dfrac{1}{3}P_k+\dfrac{1}{3}Q_k$ —②

①より　$P_k=\dfrac{1}{3}P_{k-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2P_{k-2}=\cdots=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}P_1$

$P_1=1$より　$P_k=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ —③

②より　$Q_{k+1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^k+\dfrac{1}{3}Q_k$.　$3^{k+1}Q_{k+1}=3+3^kQ_k$

$$
\begin{array}{rl}
 & 3^kQ_k=3^{k-1}Q_{k-1}+3 \\
 & 3^{k-1}Q_{k-1}=3^{k-2}Q_{k-2}+3 \\
 & \vdots \\
+ & 3^2Q_2=3Q_1+3 \\
\hline
 & 3^kQ_k=3Q_1+(k-1)3.
\end{array}
$$

$Q_1=0$より　$Q_k=\dfrac{k-1}{3^{k-1}}$ —④

3人残っているときは$\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$の確率で

2人残っているときは$\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$の確率で

ちょうど1人の勝者がきまるから

③④より.求める確率は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^k+\dfrac{2k-2}{3^k}=\dfrac{2k-1}{3^k}$