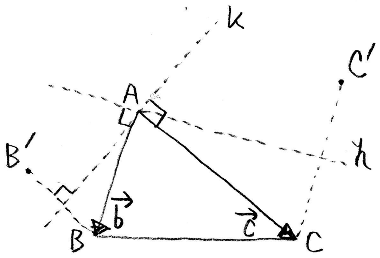
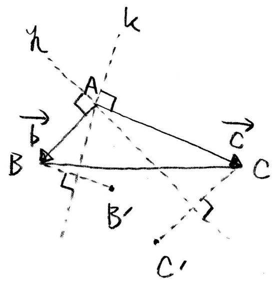
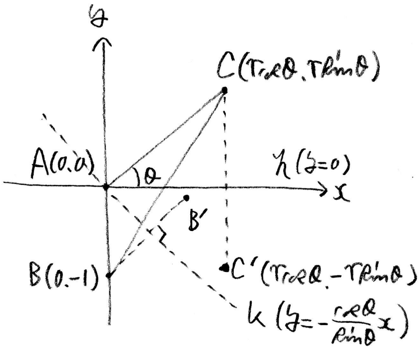
東大理科　1972前期　②







$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

左図のようにxy座標をとる.

$\overrightarrow{AB'}=(0,-1)+2\alpha(\cos\theta,\sin\theta)$

ここで $(\alpha\cos\theta,\alpha\sin\theta-1)$ は $y=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x$ 上にあるから

$\alpha\sin\theta-1=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\alpha\cos\theta$. $\alpha\sin^2\theta-\sin\theta=-\alpha\cos^2\theta$. $\alpha=\sin\theta$

よって $\overrightarrow{AB'}=(0,-1)+2\sin\theta(\cos\theta,\sin\theta)=(2\sin\theta\cos\theta,2\sin^2\theta-1)$

$\vec{b'}=\vec{b}+\vec{c}$ より. $(2\sin\theta\cos\theta,2\sin^2\theta-1)=(0,-1)+(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$\begin{cases}2\sin\theta\cos\theta=r\cos\theta\\2\sin^2\theta-1=r\sin\theta-1\end{cases}$. $r=2\sin\theta$. —①

$\vec{c'}=m\vec{b}+\vec{c}$ より. $(2\sin\theta\cos\theta,-2\sin^2\theta)=(0,-m)+(2\sin\theta\cos\theta,2\sin^2\theta)$

$-2\sin^2\theta=-m+2\sin^2\theta$. $m=4\sin^2\theta$.

$m=1$ のとき、$\sin^2\theta=\frac{1}{4}$. ①より. $\sin\theta>0$ であるから. $\sin\theta=\frac{1}{2}$. $\theta=\frac{\pi}{6}$. よって $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$, $|\vec{c}|=1$

$m=2$ のとき $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$. ①より $\sin\theta>0$ であるから $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\theta=\frac{\pi}{4}$ よって $\angle BAC=\frac{3}{4}\pi$, $|\vec{c}|=\sqrt{2}$.

$m=3$ のとき $\sin^2\theta=\frac{3}{4}$. ①より $\sin\theta>0$ であるから $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\theta=\frac{\pi}{3}$ よって $\angle BAC=\frac{5}{6}\pi$, $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.