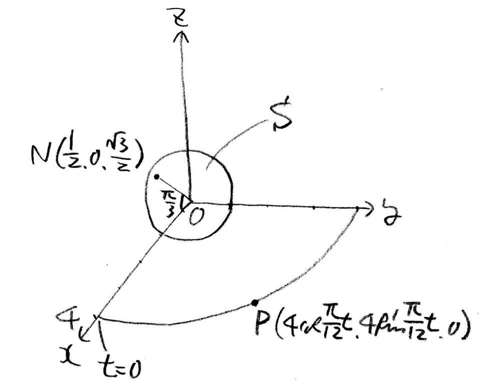
東大理科　1973前期　①



※ $-\pi \leqq \frac{\pi}{12}t \leqq \pi$

$\frac{1}{a}$倍して考える

左図のように xyz 座標をとる。

直線NPの方程式は $(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}) + k(4\cos\frac{\pi}{12}t - \frac{1}{2}, 4\sin\frac{\pi}{12}t, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ であるから

直線NP上の点と原点の距離の2乗は

$\{\frac{1}{2} + (4\cos\frac{\pi}{12}t - \frac{1}{2})k\}^2 + 16\sin^2\frac{\pi}{12}t \cdot k^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}k)^2$

$= \frac{1}{4} + 4\cos\frac{\pi}{12}t \cdot k - \frac{1}{2}k + 16\cos^2\frac{\pi}{12}t \cdot k^2 - 4\cos\frac{\pi}{12}t \cdot k^2 + \frac{1}{4}k^2 + 16\sin^2\frac{\pi}{12}t \cdot k^2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}k + \frac{3}{4}k^2$

$= (-4\cos\frac{\pi}{12}t + 17)k^2 + (4\cos\frac{\pi}{12}t - 2)k + 1$

$= \{(-4\cos\frac{\pi}{12}t + 17)k + 4\cos\frac{\pi}{12}t - 2\}k + 1$

この値が、$k \geqq 0$ のとき常に1以上であればよいから

$\dfrac{4\cos\frac{\pi}{12}t - 2}{4\cos\frac{\pi}{12}t - 17} \leqq 0$, $\cos\frac{\pi}{12}t \geqq \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{12}t \leqq \frac{\pi}{3}$, $-4 \leqq t \leqq 4$.

よってPは8秒間見えつづける。

$\overline{NP}$の2乗は $(4\cos\frac{\pi}{12}t - \frac{1}{2})^2 + 16\sin^2\frac{\pi}{12}t + \frac{3}{4} = 16\cos^2\frac{\pi}{12}t - 4\cos\frac{\pi}{12}t + \frac{1}{4} + 16\sin^2\frac{\pi}{12} + \frac{3}{4} = -4\cos\frac{\pi}{12}t + 17$.

$\overline{NP}$の2乗の最大値は $\frac{\pi}{12}t = 0$ のとき 17、最小値は $\frac{\pi}{12}t = \pm\frac{\pi}{3}$ のとき $-2+17=15$.

$\frac{1}{a}$倍して考えているから、$\overline{NP}$の最大値は$\sqrt{17}a$、最小値は$\sqrt{15}a$