東大理科　1974前期　⑤

(1)

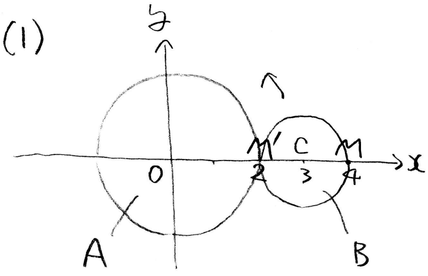

図1

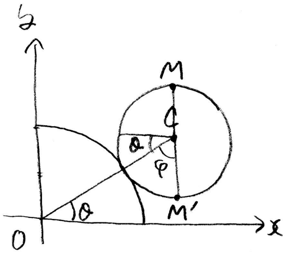

図2

(2,0)をM'とする。

図2で∠OCM'=φとすると

$2\pi\cdot 2\frac{\theta}{2\pi} = 2\pi\cdot 1\frac{\varphi}{2\pi}$　$\varphi = 2\theta$ より

$(X, Y) = (3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta + \sin 3\theta)$

(2). $f(\theta) = 3\sin\theta + \sin 3\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ とする。

$f'(\theta) = 3\cos\theta + \cos 3\theta \cdot 3$

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = (\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta)\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

$f'(\theta) = 0$ のとき　$4\cos^3\theta - 2\cos\theta = 0$.　$(2\cos^2\theta - 1)\cos\theta = 0$.　$\cos\theta = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.　$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0
$f(\theta)$	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

$f(\theta)$の増減表は左表のようになる。

よってYの最大値は $2\sqrt{2}$

$f(\frac{\pi}{4}) = 3\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,　$f(\frac{\pi}{2}) = 3 - 1 = 2$

(3) 求める値をLとすると、

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left\{\frac{d}{d\theta}(3\cos\theta + \cos 3\theta)\right\}^2 + \left\{\frac{d}{d\theta}(3\sin\theta + \sin 3\theta)\right\}^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\sin\theta - \sin 3\theta\cdot 3)^2 + (3\cos\theta + \cos 3\theta \cdot 3)^2}\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\theta + 2\sin\theta\sin 3\theta + \sin^2 3\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta\cos 3\theta + \cos^2 3\theta}\, d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos(3\theta - \theta)}\, d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta}\, d\theta = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = 6\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$$