東大理科 1975前期 6

A	B	C
×○ ○○	× ○	×

赤球を×，白球を○で表す

(i) $n+1$回目，Aにx個の×が入っているには

(i-i) n回目，Aにx個の×，$4-x$個の○が入っているとき → 確率 $P_n(x)$

Aから×を取り出しAに×をかえす，または，Aから○を取り出し，Aに○をかえせばよい．

{Aから× Bから× Cから×} を取り出す確率は $\frac{x}{4}\frac{1}{2}=\frac{x}{8}$，さらにAに×をかえす確率は $\frac{x}{8}$

{Aから× Bから○ Cから×} 〃 $\frac{x}{4}\frac{1}{2}=\frac{x}{8}$ 〃 $\frac{x}{8}\frac{2}{3}=\frac{x}{12}$

{Aから○ Bから× Cから×} 〃 $\frac{4-x}{4}\frac{1}{2}=\frac{4-x}{8}$ さらにAに○をかえす確率は $\frac{4-x}{8}\frac{1}{3}=\frac{4-x}{24}$

{Aから○ Bから○ Cから×} 〃 $\frac{4-x}{4}\frac{1}{2}=\frac{4-x}{8}$ 〃 $\frac{4-x}{8}\frac{2}{3}=\frac{4-x}{12}$

このとき $n+1$回目，Aにx個の×が入っている確率は $\left(\frac{x}{8}+\frac{x}{12}+\frac{4-x}{24}+\frac{4-x}{12}\right)P_n(x)=\frac{3x+2x+4-x+8-2x}{24}P_n(x)=\frac{1}{12}(6+x)P_n(x)$

(i-ii) n回目，Aに$x+1$個の×，$3-x$個の○が入っているとき → 確率 $P_n(x+1)$

Aから×を取り出し，Aに○をかえせばよい．

{Aから× Bから× Cから×} を取り出す確率は $\frac{x+1}{4}\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$ さらにAに○をかえす確率は 0

{Aから× Bから○ Cから×} 〃 $\frac{x+1}{4}\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$ 〃 $\frac{x+1}{8}\frac{1}{3}=\frac{x+1}{24}$

このとき，$n+1$回目，Aにx個の×が入っている確率は $\frac{x+1}{24}P_n(x+1)=\frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1)$

(i-iii) n回目，Aに$x-1$個の×，$5-x$個の○が入っているとき → 確率 $P_n(x-1)$

Aから○を取り出し，Aに×をかえせばよい

{Aから○ Bから× Cから×} を取り出す確率は $\frac{5-x}{4}\frac{1}{2}=\frac{5-x}{8}$ さらにAに×をかえす確率は $\frac{5-x}{8}\frac{2}{3}=\frac{5-x}{12}$

{Aから○ Bから○ Cから×} 〃 $\frac{5-x}{4}\frac{1}{2}=\frac{5-x}{8}$ 〃 $\frac{5-x}{8}\frac{1}{3}=\frac{5-x}{24}$

このとき $n+1$回目，Aにx個の×が入っている確率は $\left(\frac{5-x}{12}+\frac{5-x}{24}\right)P_n(x-1)=\frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1)$

(i)(ii)(iii)より $P_{n+1}(x)=\frac{1}{12}(6+x)P_n(x)+\frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1)+\frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1)$

(ii) $E_n=0\cdot P_n(0)+1\cdot P_n(1)+2\cdot P_n(2)+3\cdot P_n(3)+4\cdot P_n(4)$

$P_{n+1}(0)=\frac{1}{2}P_n(0)+\frac{1}{24}P_n(1)$

$P_{n+1}(1)=\frac{7}{12}P_n(1)+\frac{1}{12}P_n(2)+\frac{1}{2}P_n(0)$

$P_{n+1}(2)=\frac{2}{3}P_n(2)+\frac{1}{8}P_n(3)+\frac{3}{8}P_n(1)$

$P_{n+1}(3)=\frac{3}{4}P_n(3)+\frac{1}{6}P_n(4)+\frac{1}{4}P_n(2)$

$P_{n+1}(4)=\frac{5}{6}P_n(4)+\frac{1}{8}P_n(3)$

$$\begin{aligned}E_{n+1}&=P_{n+1}(1)+2P_{n+1}(2)+3P_{n+1}(3)+4P_{n+1}(4)\\&=\frac{7}{12}P_n(1)+\frac{1}{12}P_n(2)+\frac{1}{2}P_n(0)+\frac{4}{3}P_n(2)+\frac{1}{4}P_n(3)+\frac{3}{4}P_n(1)\\&\quad+\frac{9}{4}P_n(3)+\frac{1}{2}P_n(4)+\frac{3}{4}P_n(2)+\frac{10}{3}P_n(4)+\frac{1}{2}P_n(3)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}P_n(1)-\frac{1}{2}P_n(2)-\frac{1}{2}P_n(3)-\frac{1}{2}P_n(4)+\frac{7+9}{12}P_n(1)+\frac{1+16+9}{12}P_n(2)+\frac{1+9+2}{4}P_n(3)+\frac{3+20}{6}P_n(4)\\&=\frac{10}{12}P_n(1)+\frac{20}{12}P_n(2)+\frac{10}{4}P_n(3)+\frac{20}{6}P_n(4)+\frac{1}{2}\\&=\frac{5}{6}\{P_n(1)+2P_n(2)+3P_n(3)+4P_n(4)\}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}E_n+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$x=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}x=\frac{1}{2}$，$x=3$

よって $E_n-3=\frac{5}{6}(E_{n-1}-3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2(E_{n-2}-3)=\cdots=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}(E_1-3)$.

$E_1=1$であるから $E_n=-2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+3$.

(iii) $\lim_{n\to\infty}E_n=3$