



$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \theta \neq 0 \quad \therefore a_1 b_1 + a_2 b_2 = ab \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{ab}$$

$$\cos^2 \theta + \frac{a_1^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_2^2}{a^2 b^2} = 1 \quad \cos^2 \theta = \frac{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - a_1^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - a_2^2 b_2^2}{a^2 b^2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2}{a^2 b^2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{a^2 b^2}, \quad \sin \theta = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{ab}$$

有理数のことを有と書く。

有+有=有, 有x有=有,  $\frac{1}{有} = 有$  である。

(1)  $ab$  が有のとき

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{ab} \text{ であるから } \cos \theta \text{ は有, } \sin \theta = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{ab} \text{ であるから } \sin \theta \text{ は有}$$

(2)  $\cos \theta$  が有のとき

(2-1)  $\cos \theta \neq 0$  のとき

$$ab = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\cos \theta} \text{ であるから } ab \text{ は有, } \sin \theta = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{ab} \text{ であるから } \sin \theta \text{ は有}$$

(2-2)  $\cos \theta = 0$  のとき

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

$$ab = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2} = \sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2}$$

$$= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \text{ であるから } ab \text{ は有, } \sin \theta = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{ab} \text{ であるから } \sin \theta \text{ は有.}$$

(3)  $\sin \theta$  が有のとき

(3-1)  $\sin \theta \neq 0$  のとき

$$ab = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{\sin \theta} \text{ であるから } ab \text{ は有, } \cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{ab} \text{ であるから } \cos \theta \text{ は有}$$

(3-2)  $\sin \theta = 0$  のとき

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

$$ab = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2} = \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + a_1^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_2^2}$$

$$= \sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} = |a_1 b_1 + a_2 b_2| \text{ であるから } ab \text{ は有, } \cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{ab} \text{ であるから } \cos \theta \text{ は有.}$$

以上より 題意は示された。