東大理科　1977前期　④

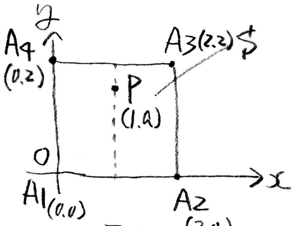

図1

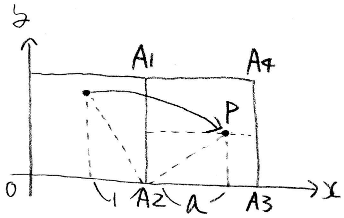

図2

図1から図2へSが動くときのPの軌跡は
中心 $(2,0)$, 半径 $\sqrt{a^2+1}$ の円の一部分

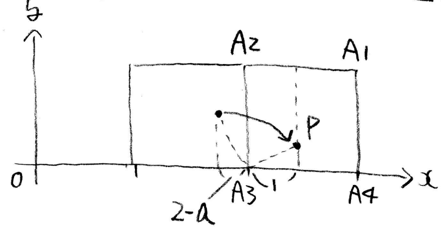

図3

図2から図3へSが動くときのPの軌跡は
中心 $(4,0)$, 半径 $\sqrt{a^2-4a+5}$ の円の一部分

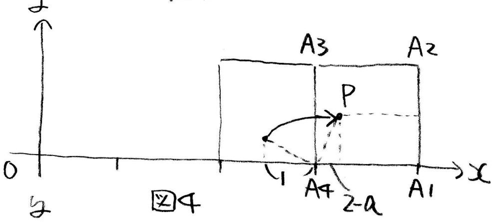

図4

図3から図4へSが動くときのPの軌跡は
中心 $(6,0)$, 半径 $\sqrt{a^2-4a+5}$ の円の一部分

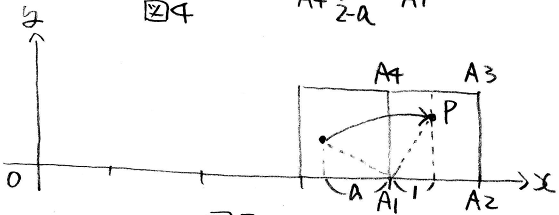

図5

図4から図5へSが動くときのPの軌跡は
中心 $(8,0)$ 半径 $\sqrt{a^2+1}$ の円の一部分

$$V(a)=2\pi\int_{-1}^{a}(a^2+1-x^2)\,dx+2\pi\int_{-1}^{2-a}(a^2-4a+5-x^2)\,dx$$

※ $(2-a)^3=8-12a+6a^2-a^3$

$$=2\pi\left[-\frac{x^3}{3}+(a^2+1)x\right]_{-1}^{a}+2\pi\left[-\frac{x^3}{3}+(a^2-4a+5)x\right]_{-1}^{2-a}$$

$$=2\pi\left\{-\frac{1}{3}a^3+(a^2+1)a-\frac{1}{3}+a^2+1-\frac{1}{3}(2-a)^3+(a^2-4a+5)(2-a)-\frac{1}{3}+a^2-4a+5\right\}$$

$$=2\pi\left(\cancel{-\frac{1}{3}a^3}+\cancel{a^3}+a-\frac{1}{3}+a^2+1-\frac{8}{3}+\cancel{4a}\cancel{-2a^2}+\cancel{\frac{1}{3}a^3}+\cancel{2a^2}-8a+10\cancel{-a^3}+4a^2-5a-\frac{1}{3}+a^2\cancel{-4a}+5\right)$$

$$=2\pi\left(6a^2-12a+\frac{38}{3}\right)=2\pi\left\{6(a^2-2a+1)+\frac{20}{3}\right\}=\left\{12(a-1)^2+\frac{40}{3}\right\}\pi$$

よって $a=1$ のとき $V(a)$ は最小値 $\frac{40}{3}\pi$ をとる.