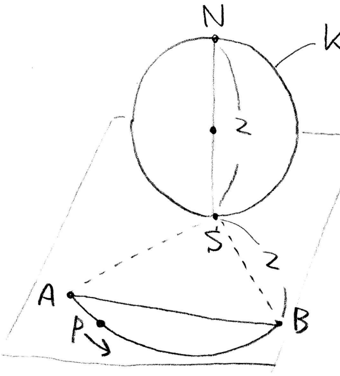
東大理科 1980前期 ②



xyz空間で考える。

Kの方程式を $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

$\overset{\frown}{AB}$の方程式を $x^2+y^2=4$ $(x,y\geqq 0)$

ABの方程式を $x+y=2$ $(x,y\geqq 0)$

N.S.A.Bの座標を $(0,0,2)$, $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ とする。

(i) Pが$\overset{\frown}{AB}$上にあるとき

$\overset{\frown}{AB}$上の点は $(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ $(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ と表せるから

NP上の点は $(0,0,2)+\alpha(2\cos\theta, 2\sin\theta, -2)=(2\cos\theta\cdot\alpha, 2\sin\theta\cdot\alpha, -2\alpha+2)$ と表せる

これがK上にあるとき、$4\cos^2\theta\cdot\alpha^2+4\sin^2\theta\cdot\alpha^2+4\alpha^2-4\alpha+\cancel{1}=\cancel{1}$, $8\alpha^2=4\alpha$, $\alpha=0, \frac{1}{2}$ であるから

Qの座標は $(\cos\theta, \sin\theta, 1)$ と表せる —①

これは中心 $(0,0,1)$, 半径1の円の $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分であるから長さは $2\pi\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\pi$

(ii) PがAB上にあるとき

$\overrightarrow{NA}=(2,0,-2)$, $\overrightarrow{NB}=(0,2,-2)$, $\overrightarrow{NA}\times\overrightarrow{NB}=4(1,1,1)$ であるから

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 4 & 4 & 4 & \end{array}$$

N.A.Bを通る平面をlとすると

lの方程式は $x+y+z-2=0$. lの長さ1の法線ベクトルは $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Kの中心からlに下ろした垂線の足をHとすると $\overrightarrow{OH}=(0,0,1)+\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha, \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha, \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha+1\right)$

Hはl上にあるから $\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha+1-2=0$ $\sqrt{3}\alpha=1$ $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Kとlの交わりの円の半径をrとすると、$r^2+\frac{1}{3}=1$ $r=\sqrt{\frac{2}{3}}$

①より、PがAにあるときのQをQ_A, BにあるときのQをQ_Bとすると、Q_A, Q_Bの座標は $(1,0,1)$, $(0,1,1)$

$\overrightarrow{HQ_A}=\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{HQ_B}=\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ $\overrightarrow{HQ_A}\cdot\overrightarrow{HQ_B}=-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}$, $|\overrightarrow{HQ_A}|=|\overrightarrow{HQ_B}|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\overrightarrow{HQ_A}$と$\overrightarrow{HQ_B}$のなす角をθとすると、$-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cos\theta$. $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ $\theta=\frac{2}{3}\pi$

長さは $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi$

(i)(ii)より長さは $\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)\pi$