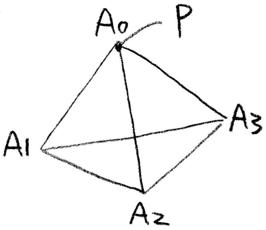
東大理科　1980前期　⑤



(1) $P_1(0)=P_2(0)=P_3(0)=0$ —①

kを0または任意の自然数として, $P_1(k)=P_2(k)=P_3(k)$と仮定すると.

$P_1(k+1)=\frac{1}{3}P_0(k)+\frac{1}{3}P_2(k)+\frac{1}{3}P_3(k)$

$P_2(k+1)=\frac{1}{3}P_0(k)+\frac{1}{3}P_1(k)+\frac{1}{3}P_3(k)$

$P_3(k+1)=\frac{1}{3}P_0(k)+\frac{1}{3}P_1(k)+\frac{1}{3}P_2(k)$

であるから. $P_1(k+1)=P_2(k+1)=P_3(k+1)$ —②

①②より. 数学的帰納法により. $P_1(n)=P_2(n)=P_3(n)$

(2) $P_0(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_1(n)=P_1(n)$

$P_1(n+1)=\frac{1}{3}P_0(n)+\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_1(n)=\frac{1}{3}P_0(n)+\frac{2}{3}P_1(n)$

$P_0(n)+P_1(n)+P_1(n)+P_1(n)=1$, $P_0(n)+3P_1(n)=1$

よって　$P_0(n+1)=-\frac{1}{3}P_0(n)+\frac{1}{3}$.　$P_0(n+1)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\{P_0(n)-\frac{1}{4}\}$

$x=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

$\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}$

$x=\frac{1}{4}$

$n\geqq 1$のとき　$P_0(n)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\{P_0(n-1)-\frac{1}{4}\}=\cdots=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\{P_0(0)-\frac{1}{4}\}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$P_0(n)=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$.　これは$n=0$のときも成り立つ.

$P_1(n)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$