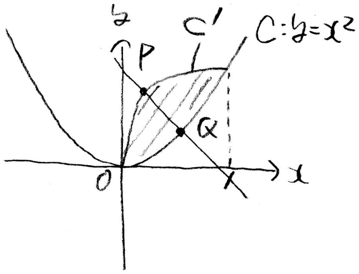
東大理科　1981前期 ③



Qにおける Cの法線の、$y \geqq x^2$の向きの長さ1の方向ベクトルは $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{4t^2}}}, \dfrac{\frac{1}{2t}}{\sqrt{1+\frac{1}{4t^2}}}\right)$

C′の座標を $\{x(t), y(t)\}$ とすると

$\{x(t), y(t)\} = (t, t^2) + (t-t^2)\sqrt{1+4t^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4t^2}}}\left(-1, \dfrac{1}{2t}\right)$

$= (t, t^2) + 2t(t-t^2)\left(-1, \dfrac{1}{2t}\right) = (2t^3-2t^2+t, t)$

$x'(t) = 6t^2-4t+1 = 6\left(t^2-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{1}{3} = 6\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3} > 0$ より、

$x(t)$は単調増加

C′、x軸、x=1 で囲まれる部分の面積は

$\displaystyle\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 y(t)\frac{dx(t)}{dt}dt = \int_0^1 t(6t^2-4t+1)dt = \left[6\frac{t^4}{4}-4\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ ―①

C、x軸、x=1 で囲まれる部分の面積は $\displaystyle\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ ―②

①、②より求める面積は $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$